



XXI. Mișcarea punctului material supus în legături	477	XXIV. Generalități. Teoreme generale	559
§ 1. Legături	477	§ 1. Mediu material continuu	559
§ 2. Mișcarea unui punct pe o curbă, fără frecare	481	§ 2. Teoremele generale	561
§ 3. Mișcarea unui punct pe o curbă fixă, sub acțiunea greutateii	485	XXV. Momente de inerție	565
§ 4. Mișcarea unui punct pe o suprafață	493	A. Definiții. Proprietăți	565
XXII. Mișcarea relativă a punctului material	501	§ 1. Generalități	565
§ 1. Ecuația fundamentală a mișcării relative	501	§ 2. Momente de inerție planare, axiale, polare și centrifugale	566
§ 2. Cazul forțelor complementare nule. Grupul Galilei-Newton	502	§ 3. Relații între momentele de inerție	568
§ 3. Echilibrul relativ	503	§ 4. Cazul mediului continuu	570
§ 4. Forțele complementare la suprafața Pământului. Forța de transport	505	§ 5. Momente de inerție geometrice	570
§ 5. Forța centrifugă propriu-zisă	506	§ 6. Raza de inerție (raza de rotație)	572
§ 6. Abaterea firului cu plumb de la verticala locului	507	§ 7. Proprietățile momentelor de inerție	572
§ 7. Calculul accelerației pămîntești g	508	B. Variația momentelor de inerție	573
§ 8. Forța Coriolis	509	§ 8. Variația momentelor de inerție față de axe paralele. Teorema lui Steiner	573
§ 9. Ecuația de mișcare a punctului material la suprafața Pământului	510	§ 9. Variația momentului de inerție centrifugal față de axe paralele	575
§ 10. Pendulul Foucault	511	§ 10. Variația momentelor de inerție față de axe concurente	576
XXIII. Dinamica sistemelor de puncte materiale	514	§ 11. Momente de inerție principale. Axe principale de inerție	577
§ 1. Definiții. Notatii	514	§ 12. Elipsoidul de inerție	579
§ 2. Legături	515	§ 13. Aplicații la calculul momentelor de inerție ale unor solide de formă specială	583
§ 3. Problema generală	515	C. Tensorul moment de inerție	586
§ 4. Teorema torsesului	522	§ 14. Tensorul moment de inerție	586
§ 5. Teorema impulsului	524	§ 15. Proprietățile tensorului moment de inerție	587
§ 6. Teorema momentului cinetic	529	§ 16. Expresia teoremei momentului cinetic și a teoremei energiei, folosind tensorul momentelor de inerție	589
§ 7. Momentul cinetic în mișcarea față de centrul maselor (centrul de greutate)	531	XXVI. Mișcarea unui solid în jurul unei axe fixe	592
§ 8. Teorema momentului cinetic față de centrul maselor	536	§ 1. Ecuațiile de mișcare	592
§ 9. Teorema arilor în cazul mișcării plane	538	§ 2. Calculul reacțiunilor	594
§ 10. Interpretarea cinematică a teoremei impulsului și a teoremei momentului cinetic	541	§ 3. Pendulul fizic	596
§ 11. Teorema energiei (Aplicații în sisteme)	542	XXVII. Mișcarea plan-paralelă (plană) a rigidului	601
§ 12. Teoremele generale. Considerații recapitulative	558	§ 1. Ecuațiile generale de mișcare	601
Dinamica solidului rigid	559	§ 2. Rostogolirea pe un plan înclinat	602

§ 3. Rostogolirea pe un plan orizontal	607	C. Giroscopul. Mișcările Pământului	658
§ 4. Ecuațiile de mișcare ale avionului	617	§ 11. Giroscopul	658
XVIII. Mișcarea solidului cu un punct fix	621	§ 12. Aplicații tehnice ale giroscopului	661
A. Considerații cinematice și geometrice	621	§ 13. Mișcările Pământului	669
§ 1. Mișcarea generală a unui solid	621	XXIX. Mișcarea generală a solidului	683
§ 2. Parametrii mișcării solidului cu un punct fix	627	§ 1. Ecuații generale	683
§ 3. Ecuațiile conurilor polodice și herpolodice	629	§ 2. Ecuațiile de mișcare în cazul solidului liber	683
B. Considerații cinetice. Rezolvarea cazurilor clasice	630	§ 3. Ecuațiile de mișcare în cazul solidului cu legături. Ecuația generală	687
§ 4. Ecuația fundamentală a mișcării. Ecuațiile lui Euler	630	§ 4. Ecuațiile de mișcare ale solidului cu masă variabilă. Generalități	697
§ 5. Cazul I. Cazul Euler-Poincaré	631	§ 5. Mișcarea rachetei	706
§ 6. Mișcarea solidului cu un punct fix supus greutatei proprii	641	XXX. Ciocniri și pereuși	713
§ 7. Cazul II. Cazul Lagrange-Poisson	642	§ 1. Definiții	713
§ 8. Cazul III. Cazul S. Kovalevskaja	648	§ 2. Teoremele generale din studiul ciocnirii	714
§ 9. Considerații de sinteză	652	§ 3. Ciocnirea centrică a două sfere	715
§ 10. Cazuri cu condiții inițiale particulare	656	§ 4. Ciocnirea oblică	719
		§ 5. Ciocnirea unei sfere cu un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe	720
		§ 6. Legături rigide. Teorema lui Carnot	724

PARTEA A CINEA MECANICA ANALITICĂ

XXXI. Generalități asupra mecanicii analitice. Principii analitice diferențiale: principiul lui d'Alembert, principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui Gauss	729	§ 2. Ecuațiile lui Lagrange	785
§ 1. Generalități asupra mecanicii analitice	729	§ 3. Teorema energiei în cazul legăturilor scleronome și al forțelor conservative	793
§ 2. Porțele de legătură. Axioma eliberării. Principiul lui d'Alembert	731	B. Stabilitatea echilibrului	794
§ 4. Principiul lucrului mecanic virtual. Multiplicatorii lui Lagrange	750	§ 4. Teorema Lagrange-Dirichlet	794
§ 4. Teorema energiei	773	§ 5. Mici oscilații	797
§ 5. Principiul celei mai mici constrângeri (Gauss)	774	C. Stabilitatea mișcării	806
§ 6. Principiul lucrului virtual în cazul frecării	778	§ 6. Stabilitatea după Leapunov	806
XXXII. Ecuațiile lui Lagrange. Stabilitatea echilibrului	783	§ 7. Sisteme scleronome. Teoremele Leapunov de stabilitate	808
A. Coordonate Lagrange generalizate	783	§ 8. Teoreme Leapunov de nestabilitate	814
§ 1. Eliminarea legăturilor olonome	783	§ 9. Sisteme reonome	815
		§ 10. Exemple	819
		§ 11. Aplicații. Cazul coordonatelor ciclice. Teorema lui Routh	821
		XXXIII. Legături neolonome	821
		§ 1. Generalități	821
		§ 2. Legături neolonome	822

XXXIV. Ecuațiile canonice. Transformarea lui Hamilton . . .	833
§ 1. Coordonate canonice	833
§ 2. Paranteza lui Lagrange. Teorema lui Lagrange	841
§ 3. Paranteza lui Poisson	841
§ 4. Coordonate ciclice	845
§ 5. Teorema Hamilton-Jacobi	845
§ 6. Proprietățile integralelor sistemului canonic	849
§ 7. Multiplicatorul lui Jacobi. Definiție	850
§ 8. Cazul ecuațiilor canonice	858

XXXV. Principii analitice variaționale	859
§ 1. Principiul general variațional	859
§ 2. Principii variaționale	863
§ 3. Principiul Hamilton-Ostrogradski	864
§ 4. Principiul celei mai mici acțiuni	866
§ 5. Principiul lui Jacobi	868
§ 6. Alte principii variaționale	869
§ 7. Considerații istorice	871
XXXVI. Transformări canonice	871
§ 1. Principiul Hamilton-Ostrogradski sub formă canonică	871
§ 2. Transformări canonice. Definiție	873
§ 3. Invariantii integrali	882

PARTEA A ȘASEA
NOȚIUNI DE DINAMICA MAȘINILOR ȘI
EXPERIENȚE MECANICE

XXXVII. Noțiuni de dinamică mașinilor	889
A. Forțele care acționează în mașini (Cineostatica)	889
§ 1. Generalități	889
§ 2. Torsorul forțelor de inerție	890
§ 3. Determinarea forțelor de inerție în cazurile particulare de mișcare a unui element al mașinii	890
§ 4. Metoda concentrării maselor	894
§ 5. Determinarea reacțiunilor în cuplurile cinematice	897
B. Transmiterea lucrului mecanic și a puterii mecanice în mașini	899
§ 6. Energia cinetică a mașinii	899
§ 7. Reducerea maselor și a forțelor	900
C. Echilibrarea maselor mobile	900
§ 8. Condițiile generale de echilibrare a rotorilor	902
§ 9. Echilibrarea maselor în rotație	904
§ 10. Echilibrarea mecanismelor plane	906
D. Funcționarea mașinilor	908
§ 11. Pazele funcționării mașinii	908
§ 12. Ecuația bilanțului energetic al mașinii	908
§ 13. Randamentul mecanic al mașinii	910
E. Reglarea funcționării mașinilor	911

§ 14. Funcționarea neregulată a mașinilor. Scopul și metodele de reglare	911
§ 15. Volantul. Determinarea momentului de inerție și a dimensiunilor volantului	913
§ 16. Regulate. Regulatorul Watt. Regulatorul Rankine	915
XXXVIII. Experiențe mecanice de laborator	917
A. Experiențe de statică	917
§ 1. Compunerea forțelor concurente în plan și în spațiu	917
§ 2. Descompunerea unei forțe după două direcții concurente	918
§ 3. Determinarea coeficientului de frecare la alunecare	919
§ 4. Momentul unei forțe în raport cu un punct	919
§ 5. Trasarea poligonului funicular	920
§ 6. Echilibrul stabil, labil și indiferent	921
B. Experiențe de cinematică	921
§ 7. Mișcarea rectilinie uniformă	921
§ 8. Mișcarea rectilinie uniform variată	923
§ 9. Determinarea vitezei unui glonț la ieșirea din țeava revolverului	923
§ 10. Determinarea valorii accelerației gravitației	924

§ 11. Mișcarea oscilatorie armonică	925	§ 3. Vectorii considerați ca tensori în E_3	952
§ 12. Mișcarea pe parabolă a punctului material	926	§ 4. Tensori de ordin superior	954
§ 13. Compunerea oscilațiilor armonice	927	§ 5. Generarea tensorilor prin derivare	957
§ 14. Determinarea bazei și rostogolitoarei	931	§ 6. Contractare	957
§ 15. Accelerația Coriolis	934	§ 7. Un nou mijloc de a recunoaște un tensor	958
C. <i>Experiențe de dinamică</i>	936	C. <i>Spațiul riemannian. Coordonate curbilinii</i>	958
§ 16. Verificarea principiului inerției	936	§ 8. Tensor fundamental	958
§ 17. Forța de inerție în cazul unei mișcări de rotație în jurul unui ax fix	936	§ 9. Diferențiala unui vector în coordonate curbilinii. Derivata covariantă	962
§ 18. Roata Maxwell	937	§ 10. Transport paralel	964
§ 19. Demonstrarea influenței momentului de inerție	937	§ 11. Curbe autoparalele. Curbe geodezice	965
§ 20. Determinarea momentului de inerție axial al unui corp rigid în raport cu o axă care trece prin centrul său de greutate, prin metoda oscilațiilor pendulului fizic	938	§ 12. Accelerația în spațiul riemannian	965
§ 21. Exemplificarea teoremei impulsului	938	§ 13. Coordonate curbilinii în spațiu	965
§ 22. Exemplificarea teoremei momentului cinetic	939	§ 14. Componentele vitezei în spațiu	967
§ 23. Verificarea mișcării de precesie	940	§ 15. Componentele accelerației	969
§ 24. Determinarea momentului giroscopic	942	§ 16. Divergența	970
§ 25. Demonstrarea teoremei impulsului în ciocnirea centrică	943	§ 17. Gradient. Operatorul lui Laplace	971
§ 26. Determinarea vitezei unei bile care se rostogolește într-un canal, la ieșirea din acesta, ca exemplificare a fenomenului de ciocnire elastică	943	§ 18. Operatorul rotor. Produsul vectorial	972
Anexa I. <i>Calculul tensorial</i>	947	§ 19. Pseudotensori	973
A. <i>Noțiuni de calcul tensorial</i>	947	§ 20. Transformarea în tensori a rotorului și a produsului vectorial	973
§ 1. Vectori reciproci	947	§ 21. Cazuri particulare de coordonate curbilinii	975
§ 2. Componente contravariante și componente covariante	950	§ 22. Coordonate curbilinii determinate prin trei familii de suprafețe, date. Tensorul fundamental metric	979
B. <i>Vectori și tensori într-un spațiu euclidian E_3</i>	952	§ 23. Cazuri particulare	980
		Anexa II. <i>Tabele cu centre de greutate și momente de inerție</i>	982
		Bibliografie	995
		Index autori	997
		Index alfabetic	999

INTRODUCERE

A. DEFINIȚIA ȘI DIVIZIUNILE MECANICII

Mecanica este una dintre cele mai vechi științe și evoluția ei, ca și evoluția altor științe, este indisolubil legată de dezvoltarea forțelor de producție. Mecanica s-a format ca știință de-a lungul timpului, pe baza generalizării experienței dobândite de oameni în procesul activității conștiente efectuate pentru satisfacerea nevoilor de a capta și a utiliza forțele naturii, de a clădi, de a ușura muncile grele, de a construi mașini etc.

Dezvoltarea teoriei s-a produs în strînsă legătură cu nevoile practicii social-istorice, în procesul dialectic de cunoaștere a realității obiective, de la observarea realității obiective la gîndirea abstractă și de la aceasta la verificarea prin practică. Conținutul mecanicii, în fiecare stadiu de dezvoltare istorică, s-a îmbogățit cu noi cunoștințe teoretice, care s-au adăugat la cele vechi sau au aprofundat cunoștințele existente.

De-a lungul a peste 2500 de ani, mecanica s-a dezvoltat și perfecționat necontenit, dezvoltarea Mecanicii împletindu-se strîns cu dezvoltarea civilizației omenеști.

În cele ce urmează, ne vom ocupa de *Mecanica teoretică*, numită adeseori *Mecanica rațională*, iar uneori *Mecanica generală*. Mecanica teoretică fiind legată inseparabil de practică, de tehnică, vom arăta și unele din cele mai importante aplicații corespunzătoare teoriei expuse.

Mecanica teoretică este una dintre științele naturii; ea studiază legile obiective ale mișcării mecanice a corpurilor materiale.

Mecanica teoretică este o diviziune a Fizicii.

Scopul Mecanicii teoretice este de a stabili legile obiective ale fenomenelor de mișcare mecanică a corpurilor materiale în vederea aplicării lor în producție, în interesul omului, cu maximum de randament.

Este necesar să explicăm de la început ce se înțelege prin mișcare mecanică și corp material.

§ 1. *Mișcare mecanică, sisteme de referință.* Mișcarea mecanică a unui corp material este schimbarea în timp a poziției corpului sau a unei părți a acestuia în raport cu un alt corp solid ales ca sistem de referință.

Aceasta, spre deosebire de mișcarea înțeleasă în sens larg, adică în sensul oricărei schimbări în starea corpurilor materiale, a organismelor vii, a societății etc., mișcare care este universală și constituie obiectul de studiu al diferitelor științe, cum sînt chimia, biologia, științele sociale etc.

Materia este într-o continuă mișcare, fără început și fără sfîrșit. Corpurile materiale pe care le studiem, ca părți componente ale materiei uni-

versale, sînt și ele într-o continuă mișcare și, deci, ceea ce va studia Mecanica — ca mișcare mecanică a lor — va fi modificarea unei stări de mișcare existente, în raport cu un sistem de referință dat. În cele ce urmează, mișcarea mecanică va fi numită prescurtat, *mișcare*.

Sistemul de referință este ales arbitrar, dar de fiecare dată va trebui să fie determinat pe deplin față de anumite repere (alte corpuri materiale), pentru a exista posibilitatea ca, în raport cu el, în decursul unui anumit interval de timp, să se poată stabili în mod precis poziția corpului în mișcare.

Alegerea sistemului de referință (a reperului) este foarte importantă deoarece, la rîndul său, sistemul de referință poate fi în mișcare în raport cu alte sisteme de referință.

Sistemele de referință se numesc *fixe*, atunci cînd nu au mișcări față de un sistem considerat în mod convențional ca imobil și se numesc *mobile*, atunci cînd se mișcă în raport cu sistemul convențional.

Din cele de mai înainte rezultă și definiția stării de repaus.

Repausul unui punct material este starea lui de imobilitate în raport cu un sistem de referință dat; iar repausul unui sistem de puncte materiale se va produce atunci cînd toate punctele lui vor fi în repaus.

Se vede, deci, că mișcarea și repausul sînt stabilite în raport cu anumite sisteme alese arbitrar și, în consecință, conțin în ele un element relativ de care va trebui să ținem seama în studiile pe care le facem. Repaus absolut nu există.

În legătură cu mișcarea corpurilor s-a pus problema *cauzelor* care produc mișcarea considerată, mai exact problema cauzelor care produc modificarea stării de mișcare existente a corpurilor. Această problemă a dat naștere la multe discuții și asupra ei vom mai reveni în cele ce urmează.

Trebuie să amintim, totuși, că multă vreme s-au considerat drept cauze ale mișcării numai forțele. Mai tîrziu, s-a constatat că pot exista mișcări și fără intervenția forțelor, de exemplu mișcările rectilinii și uniforme (mișcări inerțiale).

Sistemele filozofice idealiste consideră forța ca avînd origine mistică, ca neavînd legătură cu materia. De fapt, forța are totdeauna o sursă materială; ea apare cu ocazia acțiunii unui corp asupra altui corp. Un corp nu-și poate schimba starea de mișcare pe care o are la un moment dat, dacă asupra lui nu acționează un alt corp material.

Corpul asupra căruia acționează forța își va schimba starea de mișcare mecanică datorită mișcării mecanice a celui alt corp. Engels spune despre aceasta: „Forța este, prin urmare, numai expresia abstractă pentru măsura transmiterii mișcării”. Numai corpul avînd o mișcare rectilinie și uniformă nu este acționat de nici o forță sau forțele care îl acționează își fac echilibru, ceea ce revine la o situație similară aceleia în care nu ar fi acționat de nici o forță.

S-a ajuns astfel la noțiunea de *sistem de referință inerțial*. Acesta este sistemul de referință față de care o particulă materială neinfluențată de alte corpuri materiale, în Mecanica clasică, are o mișcare rectilinie și uniformă. Orice alte sisteme de referință, care se mișcă rectiliniu și uniform față de un sistem de referință inerțial dat, sînt tot sisteme de referință inerțiale.

§ 2. **Particulă materială**, [punct material, corp material. *Particula materială* este o părticică a corpului, atât de mică încît dimensiunile ei se neglijează uneori, iar particula poate fi asimilată cu un punct. Mișcarea ei este pe deplin determinată de mișcarea acestui punct, fapt care face ca, în acest caz, particula materială să fie numită, în mod abstract, *punct material*.

Menționăm că este posibil ca și pentru corpuri mari, cu dimensiuni apreciabile, să se reducă studiul la examinarea mișcării unui *punct material*, atunci cînd nu interesează forma corpului și dimensiunile lui; masa corpului, în acest caz, se consideră concentrată în punctul material (punctul geometric) studiat.

Punctul material este deci un punct geometric, dotat cu o masă proprie, determinată. Noțiunea de punct material este un concept matematic, care ușurează mult calculele.

Un sistem de puncte materiale este constituit din totalitatea punctelor materiale luate în considerare, mișcarea fiecărui punct depinzînd de poziția și mișcarea celorlalte.

Corpul material, despre care va fi vorba în Mecanică, va fi considerat ca fiind format dintr-o infinitate de puncte materiale legate între ele, astfel încît distanțele dintre puncte să rămîină invariabile. Conceput în acest fel, corpul material — numit și *corp solid* sau *corp rigid* — nu este decît un sistem de puncte materiale legate invariabil, rigid, între ele, o formă abstractă a corpului solid real.

În timp ce la corpul solid real schimbările formei și volumului nu pot fi neglijate, la corpul rigid din Mecanică acestea nu se iau în considerație.

Mecanica teoretică se folosește de această abstractizare cu scopul de a simplifica studiul într-o primă fază. În faza următoare, aceea a Mecanicii aplicate, vor trebui luate în considerare deformațiile corpului.

Forma corpurilor: după forma lor, facem în Mecanică următoarea clasificare a corpurilor:

Corpurile care au una dintre cele trei dimensiuni foarte mare în raport cu celelalte două, se numesc *bare* (fig. 1, a).

Cînd două dimensiuni sînt foarte mici în raport cu a treia, iar corpul este flexibil sub acțiunea forțelor exterioare și poate lua orice formă, fără a opune o rezistență sensibilă la încovoiere, avem cazul *firelor* (fig. 1, b).

O bară este definită prin axa ei și prin legea de variație a secțiunii transversale în lungul axei barei. Bara este generată prin deplasarea sec-

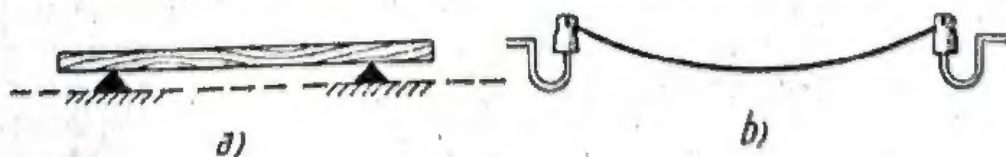


Fig. 1

țiunii transversale, astfel încît aceasta să rămîină normală pe axă iar centrul ei de greutate să fie pe axă. Barele drepte au ca axe linii drepte; barele curbe au ca axe curbe plane (fig. 2) sau curbe în spațiu, după forma respectivă a barei.

În cazul cînd două dintre dimensiunile corpului sînt apreciabile în raport cu cea de a treia (foarte redusă), avem o *placă* (fig. 3); cînd placa este flexibilă (sub acțiunea forțelor exterioare placa poate lua orice formă, fără a opune o rezistență sensibilă la încovoiere) avem o *membrană*.



Fig. 2.

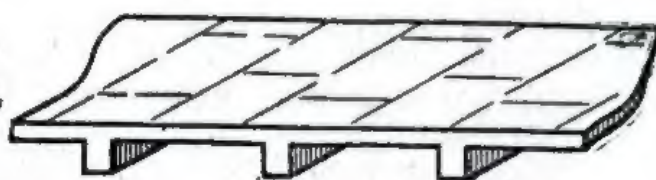


Fig. 3.

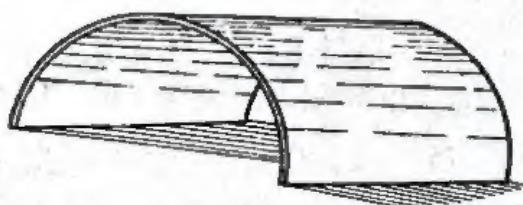


Fig. 4.

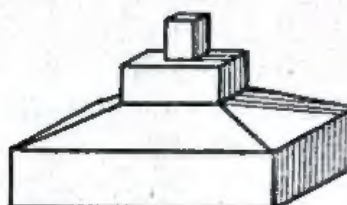


Fig. 5.

După aceleași criterii ca la bare, prin extinderea noțiunii de axă, avem la plăci suprafața mediană.

Cînd suprafața mediană se poate suprapune unui plan, avem o *placă plană* sau o *dală*; cînd se suprapune pe o suprafață curbă, avem o *placă curbă* (fig. 4).

În fine, cînd toate trei dimensiunile corpului sînt de mărimi aprecia-bile, comparabile între ele, se obține un bloc (fig. 5).

În sistemele pe care le studiem, va trebui să distingem forma corpurilor cu care lucrăm, deoarece forma corpurilor influențează asupra metodelor de calcul pe care le aplicăm.

§ 3. Diviziunile Mecanicii. Problema generală a Mecanicii constă în stabilirea unor relații între forțele care acționează asupra unui sistem de corpuri materiale și mișcarea mecanică realizată de aceste corpuri. Metodologic, convențional, ținînd seama de cele două elemente de bază care intervin în studiile și aplicațiile corespunzătoare, forțele și mișcarea mecanică și ținînd seamă și de dezvoltarea istorică a acestei științe, Mecanica teoretică se consideră ca avînd trei mari diviziuni: Statica, Cinematica și Dinamica.

Statica studiază transformarea sistemelor de forțe exterioare aplicate corpurilor în sisteme echivalente și condițiile de echilibru ale sistemelor de forțe.

Statica studiază un caz particular al mișcării: cazul cînd corpul, sub acțiunea forțelor exterioare care-l acționează, rămîne în repaus în raport cu un sistem de referință determinat, sau are o mișcare rectilinie și uniformă.

Această parte a Mecanicii era cunoscută încă din antichitate, prezentînd un interes deosebit pentru tehnica construcțiilor. De aceea găsim

studii temeinice în ceea ce privește Statica, făcute încă înaintea erei noastre, de Arhitas, Aristotel, Arhimede, Vitruvius și alții.

Cinematica studiază mișcarea punctului sau a sistemelor de puncte, în timp, din punct de vedere geometric, independent de forțele care acționează asupra punctului sau sistemului. De aceea a și fost numită uneori *Geometria Mecanicii* (*Phoronomia*). Deși într-o foarte mică măsură s-au ocupat și anticii cu studii geometrice privitoare la mișcare, totuși Cinematica a fost creată în timpurile moderne. De abia de la Leonardo da Vinci, Galilei, Newton și Lagrange se poate vorbi de studii specifice Cinematicii.

Dinamica studiază mișcarea corpurilor materiale ținând seama de forțele care acționează asupra acestora. Această parte a Mecanicii stabilește cele mai generale legi ale mișcării corpurilor materiale și este de o deosebită importanță pentru tehnica mașinilor, construcțiilor etc.

Dinamica s-a dezvoltat, îndeosebi, începînd de la Galilei, Newton și Lagrange; ea capătă o dezvoltare din ce în ce mai amplă în prezent, cînd calculul mașinilor complexe și al marilor construcții nici n-ar mai fi de conceput fără a ține seamă de solicitările dinamice.

De fapt, Mecanica este un tot și este destul de dificil să se facă împărțirea arătată mai înainte. Mereu trebuie să se treacă de la o diviziune la alta. Numai convențional și pentru a se da posibilitatea unei însușiri treptate a materialului, se procedează la această împărțire. S-a mai ținut seamă, în această împărțire, și de dezvoltarea istorică a acestei științe.

În dezvoltarea prezentei lucrări se vor face aceste împărțiri numai în măsura în care va fi nevoie pentru înțelegerea treptată a fenomenelor.

În concluzie, Mecanica teoretică studiază legile obiective cele mai generale ale mișcării mecanice a corpurilor rigide, considerate ca simple puncte materiale sau ca sisteme de puncte materiale legate invariabil între ele.

Sistemele la care distanțele dintre punctele materiale se schimbă sub acțiunea diferitelor solicitări, sînt studiate în *Mecanica aplicată* sau *Mecanica corpurilor deformabile*: Rezistența materialelor, Elasticitatea, Mecanica fluidelor etc. Mecanica teoretică stă la baza calculului construcțiilor, mașinilor etc. și are o importanță deosebită pentru producție.

Vom face observația, asupra căreia vom reveni mai tîrziu, că Mecanica, definită ca mai înainte, privește mișcarea corpurilor rigide „macroscopice” a căror mișcare se produce cu viteze obișnuite pentru om și mult inferioare vitezei luminii.

Este ceea ce numim Mecanica clasică, spre deosebire de alte Mecanici mai noi, în care, de exemplu, vitezele corpurilor sînt foarte mari, apropiindu-se de cea a luminii (Mecanica relativistă), sau în care se studiază corpuri „microscopice”¹ (Mecanica cuantică, Mecanica statistică).

Instrumentul de calcul în Mecanică îl constituie matematicile cele mai avansate, în deosebi Analiza matematică, calculul vectorial și cal-

¹ Denumirea de „microscopice”, utilizată adesea, este improprie deoarece în Mecanica cuantică se studiază particule mult mai mici decît cele care se văd la microscop (electroni etc.).

culul tensorial; adeseori s-a spus chiar că Mecanica a fost matematizată în chip exagerat. Păstrînd o legătură strînsă cu numeroasele aplicații în care intervine Mecanica, acest pericol poate fi evitat.

B. NOȚIUNI ȘI PRINCIPII FUNDAMENTALE ALE MECANICII

Mecanica, ca și celelalte științe, își bazează teoria pe cîteva noțiuni și principii fundamentale — noțiuni și principii stabilite pe baza unei îndelungate experiențe — care pot fi verificate în lucrările ce se execută pe baza proprietăților lor, dar care nu pot fi reduse — cel puțin în Mecanica clasică, cu cunoștințele pe care le avem pînă în prezent — la alte noțiuni sau principii mai simple.

Studiind mișcarea mecanică a corpurilor materiale, noțiunile fundamentale care intervin în Mecanica clasică sînt: *spațiul, timpul și masa*; iar principiile fundamentale sînt: *principiul inerției, principiul independenței acțiunii forțelor și principiul egalității acțiunii cu reacțiunea*.

Mecanica clasică a fost creată de-a lungul a peste 2 000 ani și este folosită, în tehnica curentă, la calculul construcțiilor și mașinilor obișnuite, în care intervin viteze cu mult inferioare vitezei luminii. În Mecanica clasică se atribuie spațiului și masei proprietăți care, de cele mai multe ori, pot fi verificate de simțurile omului sau cu aparate nu prea complicate. În Mecanica clasică se aplică geometria lui Euclid și Analiza matematică curentă, teoria Mecanicii clasice constituind o primă aproximație pentru a face cercetări și calcule cu privire la fenomenele curente, la scara omului. Mecanica clasică se mai numește și Mecanica newtoniană (fiind bazată pe principiile enunțate de Isaac Newton în 1686).

Începuturi în teoria Mecanicii clasice au fost făcute încă din antichitate, de Arhitas, Aristotel, Arhimede, Vitruvius etc.; dar prima ei fundamentare științifică au făcut-o Galilei și Newton, în secolul al XVII-lea. După aceea au urmat numeroase precizări și perfecționări, care continuă și în prezent.

În ultimul secol au apărut și alte mecanici, care țin seama de viteze foarte mari, de alcătuirea materiei pînă la microparticule și de alte proprietăți ale materiei, descoperite în ultimul timp. Mecanica relativistă, cuantică, ondulatorie, statistică etc. sînt astfel de mecanici, dar care nu constituie obiecte de studiu în cadrul acestei lucrări.

§ 1. Noțiunile fundamentale ale Mecanicii. Noțiunile fundamentale de care ne ocupăm în Mecanica clasică sînt: *spațiul, timpul și masa*.

De spațiu, timp și masă ne dăm seama, pe baza practicii, că există în mod obiectiv, în realitatea înconjurătoare: trăim în spațiu și în timp, în jurul nostru sînt diferite obiecte la care ajungem mișcîndu-ne, obiectele au o masă de care ne dăm seama cînd vrem să le mișcăm etc.

Cu timpul, prin generalizarea unui număr mare de experiențe făcute asupra realității din jurul său, omul a reușit să formuleze aceste noțiuni, ca o reflectare generalizată în mintea sa a unor fenomene aparținînd realității pe care o trăia. Bineînțeles, în măsura în care nivelul cunoașterii științifice i-a permis aceasta în diferite epoci istorice.

Spațiul, timpul, masa și mișcarea constituie unitatea dialectică a materiei. Ele reprezintă diferitele forme de existență ale realității obiective din jurul nostru, care este materia.

Aceasta, spre deosebire de concepția lui Newton, care considera spațiul, timpul și masa ca fiind complet independente și fără nici o legătură între ele. Această mentalitate a durat multă vreme și mai există și astăzi în concepția idealistă care nu vede legătura spațiu-timp-masă-mișcare și care rupe aceste noțiuni de realitate. Mecanica clasică admite și ea lipsa de legătură dintre spațiu, timp și masă.

Materialismul dialectic a arătat în mod clar falsitatea acestor afirmații și a dovedit interdependența dintre spațiu, timp, masă și mișcare. Totodată a dovedit realitatea obiectivă a materiei și faptul că materia este într-o continuă mișcare, fără început și fără sfârșit.

În cele ce urmează vom examina pe scurt aceste noțiuni și vom arăta anumite pr prietăți care li se atribuie în „Mecanica clasică.”

Spațiul este una dintre formele obiective de existență a materiei. De spațiu ne dăm seama direct, prin simțurile noastre. „Formele de bază ale oricărei existențe — spune Engels — sînt spațiul și timpul, și o existență în afara timpului este o absurditate tot atît de mare ca și o existență în afara spațiului” (Fr. Engels, „Anti-Dühring”, București, Ed. P.M.R., 1952, ed. a II-a, p. 61).

Noțiunea de spațiu oglindește spațiul real existent în mod obiectiv. Spațiul Mecanicii clasice se consideră ca avînd următoarele proprietăți:

- este infinit, adică nu are nici o limită; iar pentru a preciza poziția ocupată de un corp trebuie să ne raportăm la un alt corp, care constituie corpul-reper;

- este tridimensional;

- este continuu, adică nu se poate trece de la un punct al spațiului la altul, fără a trece printr-o infinitate de puncte intermediare foarte apropiate;

- este omogen, adică diferitele porțiuni ale lui nu se deosebesc unele de altele;

- este izotrop, adică proprietățile după diferitele direcții care pleacă dintr-un același punct nu se deosebesc între ele;

- permite mărirea sau reducerea figurilor, dacă se păstrează unghiurile neschimbate și se menține un raport de proporționalitate între dimensiuni; se obțin în acest mod figuri asemenea.

Spațiul astfel definit constituie spațiul geometriei euclidiene, permițînd aplicarea metodelor geometriei clasice și calculului infinitezimal obișnuit.

În mecanicile mai noi, aceste proprietăți se modifică într-o oarecare măsură. Astfel, spațiul rămîne lăsat și tridimensional, dar nu mai este omogen și izotrop. Cînd se consideră că formează o unitate cu timpul și masa, își schimbă și unele proprietăți în consecință.

Timpul este și el o formă obiectivă de existență a materiei. Noțiunea de timp oglindește timpul real existent în mod obiectiv. De timpul real ne dăm seama în mod practic, cu simțurile noastre, în legătură cu succesiunea evenimentelor din natură.

Chiar spațiul este perceput tot în legătură cu timpul, deoarece ne dăm seama de spațiu, parcurgându-l de la un loc la altul, într-un anumit timp.

Timpul în Mecanica clasică este: nelimitat, continuu, omogen, se scurge într-un singur sens (este ireversibil).

Durata fenomenelor se reperează față de o origine a timpului, aleasă arbitrar.

Mecanicile mai noi păstrează, în general, aceste proprietăți cu unele modificări, în ceea ce privește omogenitatea.

Masa corpurilor măsoară inerția lor. Noțiunea de masă oglindește masa reală a corpurilor, existentă în mod obiectiv și independentă de locul unde se măsoară. Simțurile noastre percep masa ca pe o caracteristică directă a existenței substanței.

În strînsă legătură cu noțiunea de masă este noțiunea de forță. *Forța* este noțiunea care apare în legătură cu schimbarea stării de mișcare (sau de repaus relativ) a unui corp. Forța caracterizează direcția și intensitatea acțiunii unui corp material asupra altui corp material, căruia îi schimbă starea de mișcare mecanică pe care o are (existentă); forța măsoară transmiterea mișcării unui corp asupra altui corp.

Adeseori forța a fost considerată ca a treia noțiune fundamentală a Mecanicii în locul masei; în acest caz, masa ar deveni o noțiune derivată din forță. Studiind însă mai îndeaproape fenomenul, observăm că, pentru un același corp, forța variază după mărimea intervalului de timp în care voim să producem o anumită deplasare a corpului. Cu alte cuvinte, forța depinde și de variația de viteză pe care o capătă corpul. Newton — primul care a introdus noțiunea de masă în Mecanica clasică — a conchis, la acea epocă, că orice corp are un element caracteristic al existenței sale; acest element caracteristic îl constituie masa, — forța fiind funcție de acest element și de accelerația mișcării pe care o capătă corpul.

Ca noțiune fundamentală, masa este o noțiune ireductibilă în Mecanica clasică și se măsoară prin raportul dintre forța care acționează corpul (îi modifică starea de mișcare) și variația de viteză (accelerația) pe care o capătă acel corp.

Dacă se consideră greutatea corpului, aceasta imprimă corpului lăsat să cadă liber o variație de viteză sau o accelerație numită accelerația gravitației; masa corpului este egală cu raportul dintre greutatea corpului (forță) și accelerația gravitației ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$, la latitudinea țării noastre și la nivelul mării).

În Mecanica clasică, masa era considerată ca o proprietate invariabilă a substanței și deci identică cu materia. Mecanicile mai noi arată însă că masa nu este invariabilă, ci depinde și de viteza cu care se mișcă corpul a cărui masă se ia în considerație.

§ 2. Principiile fundamentale ale Mecanicii. Mecanica clasică se bazează pe un număr de legi sau principii fundamentale, numite uneori și postulatele sau axiomele Mecanicii clasice.

Aceste principii fundamentale nu pot fi dovedite complet pe cale experimentală sau teoretică și nici nu pot fi reduse, pînă acum, la alte legi mai simple. Dar, ca și noțiunile fundamentale, principiile fundamen-

tale se verifică, în Mecanica clasică, în toate împrejurările în care intervine aplicarea lor. De aceea, principiile fundamentale sînt admise în Mecanica clasică ca valabile, cel puțin pînă cînd descoperiri noi vor veni să le dea o altă formă.

Este adevărat că anumite fenomene mecanice nu-și mai găsesc explicații satisfăcătoare în Mecanica clasică și — în timpul din urmă, pentru explicarea acestor fenomene cu caracter deosebit — principiile Mecanicii clasice au suferit modificări; aceste fenomene, însă, nu intră în cuprinsul studiilor care formează obiectul acestei lucrări și, de aceea, nu vom insista asupra lor.

În cele ce urmează, se va face doar o scurtă expunere a acestor principii, urmînd să se revină cu unele precizări asupra lor mai tîrziu.

Principiile fundamentale ale Mecanicii clasice sînt următoarele:

a) *Principiul inerției*. Recunoscut pentru prima dată de Galilei și formulat explicit, mai tîrziu, de Newton, principiul are următorul cuprins:

„Un corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă, atît timp cît nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare”. [Corpus¹) omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quantenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare].

Newton numește acest principiu, în „Principiile matematice ale filozofiei naturale” — capitolul „Axiomele sau legile mișcării”, *Legea I* (Lex prima).

Acest principiu, care guvernează în Mecanica clasică atît mișcarea corpurilor cît și echilibrul lor, are ca idee fundamentală constatarea că, atît timp cît nu intervine o cauză exterioară, corpul are o mișcare rectilinie și uniformă — și în subsidiar ideea că, drept cauză modificatoare a mișcărilor se consideră forța.

b) *Principiul independenței acțiunii forțelor*. Indicat de Galilei, principiul a fost formulat inițial de Newton, astfel: „*Accelerația unui corp este proporțională cu forța motoare aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța*”. [Mutationem motus proportionale esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur].

Newton numește acest principiu: *Legea II* (Lex secunda).

În comentariul acestei legi, el arată că, dacă o forță produce o accelerație, o forță dublă va produce o accelerație dublă și așa mai departe, fie că, față de prima forță este aplicată „laolaltă și deodată” sau „treptat și succesiv”.

Pornind de la această observație, Newton a introdus noțiunea de masă, ca raport între modulul forței \vec{F} și modulul accelerației \vec{a} , adică $\frac{F}{a} = m$. În forma $\vec{F} = m\vec{a}$, principiul exprimă *ecuația fundamentală a Dinamicii*. Aceasta se mai scrie: $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$. Newton mai constată că, dacă corpul are o accelerație, aceasta se va aduna algebric cu accelerația existentă în cazul cînd direcțiile celor două accelerații coincid și se va compune geometric în cazul cînd direcțiile lor sînt diferite.

¹ Newton înțelegea prin „corpus” punctul material, referindu-se la corpurile cerești, care în problemele de astronomie sînt adesea considerate ca puncte materiale.

Comentariul principiului al II-lea cuprinde astfel și *principiul paralelogramului forțelor*: cînd asupra unui punct material acționează simultan două forțe avînd direcții diferite, efectul este același ca și cînd asupra punctului ar acționa o forță unică denumită *rezultantă* și care are ca mărime direcție și sens diagonala paralelogramului avînd drept laturi forțele considerate. Acest comentariu este cunoscut sub numele de *Corolarul I* al lui Newton.

Ținînd seama de cele arătate, principiul II, într-o formă sintetică, mai nouă, se enunță și astfel: *efectul unei forțe asupra unui corp este independent de viteza lui, precum și de acțiunile altor forțe.*

c) *Principiul acțiunii și reacțiunii*. Acest principiu a fost formulat de Newton astfel:

„La orice acțiune corespunde totdeauna o reacțiune egală și contrară: sau acțiunile reciproce a două puncte materiale sînt totdeauna egale și îndreptate în sens contrar”. [Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi].

Newton numește acest principiu: *Legea III* (Lex tertia).

Principiul se aplică în Mecanica clasică atît în cazul contactului direct dintre corpuri cît și în cazul acțiunii de la distanță.



Fig. 6.

Astfel, un corp așezat pe o masă acționează asupra mesei prin greutatea lui; la rîndul ei, masa exercită asupra corpului o forță egală cu această greutate și de aceeași direcție, însă de sens contrar.

De asemenea, un corp *A* care atrage alt corp *B* este la rîndul său atras de acesta cu o forță egală cu aceea exercitată de *A*, cu aceeași direcție, însă de sens opus (fig. 6).

O b s e r v a Ț i e. Fiindcă am vorbit despre forțe, este important să arătăm o clasificare sumară a forțelor pentru a ușura înțelegerea denumirilor care se vor utiliza în cele ce urmează.

Forțele se clasifică după natura lor, în:

— *forțe exterioare date* (externe date sau active), care se aplică punctului material sau corpului material, din afara lor;

— *forțe exterioare de legătură* (externe de legătură, pasive sau reacțiuni), care se produc în legăturile punctului material sau corpului material considerat cu mediul înconjurător (ca reacțiuni ale corpului de care se leagă);

— *forțe interioare* (eforturi), care apar în interiorul corpului, legînd particulele acestuia între ele, două cîte două. Forțele interioare sînt două cîte două egale și de sensuri contrarii.

— *forțe de inerție*, care apar datorită inerției corpurilor; ele acționează asupra agentului motor (corpul care a produs mișcarea corpului considerat).

Din punct de vedere al modului cum se aplică și se transmit, forțele pot fi:

— *forțe concentrate*, care se consideră că sînt aplicate și acționează într-un singur punct (teoretic);

— *forțe repartizate*, care se consideră că se aplică și acționează pe o anumită lungime sau suprafață; repartizarea poate fi uniformă (egală), triunghiulară, trapezoidală, curbilinie etc.;

— *forțe masice*, care acționează asupra unor mase avînd volumul diferit de zero (de exemplu greutatea corpurilor).

Asupra acestor definiții și asupra modului cum lucrează forțele se va mai reveni.

C. SCURT ISTORIC

Evoluția Mecanicii, ca și evoluția altor științe, este indisolubil legată de dezvoltarea forțelor de producție.

Nevolile tot mai mari ale omenirii — în legătură cu ridicarea nivelului material și cultural — au împins oamenii la perfecționarea forțelor de producție și în consecință, printr-o practică tot mai lărgită, prin generalizarea experienței, la formarea, cu timpul, a teoriei; în primul rând în domeniul construcțiilor, apoi al mașinilor, mijloacelor de transport etc.

Dezvoltarea s-a produs pe calea dialectică de cunoaștere a realității obiective: de la observarea realității la gândirea abstractă și, de la aceasta, înapoi la verificarea practică. Astfel, conținutul Mecanicii, în fiecare stadiu de dezvoltare, s-a îmbogățit mereu cu noi cunoștințe teoretice, care, fie că s-au adăugat la cele vechi, fie că au perfecționat cunoștințele anterioare.

Mecanica, ca știință, apare o dată cu acumularea și generalizarea experienței în epoca creerii primelor mijloace de producție.

În primul rând a apărut *Statica*, dezvoltarea ei fiind legată de arta construcțiilor, încă din antichitate.

Formațiunea social-economică sclavagistă — caracteristică lumii antice — se manifesta printr-o tehnică redusă aproape numai la dispozitive de ridicare și deplasare a greutateilor. Problema studiului dinamic al mișcării „mașinilor” nu se punea încă, fiind suficient calculul static. De aceea se vorbește mai mult despre forțe decît despre mișcare.

Noțiunea fundamentală a staticii — forța — apare ca urmare a constatării efortului muscular, de care omul își dă seama prin practică. Tot practica împinge la precizarea teoriei pîrghiilor și planului înclinat. Începutul secolului al IV-lea î.e.n. este marcat prin apariția unor teorii privitoare la compunerea forțelor și la noțiunea de echilibru.

Arhitas din Trent (430—365 î.e.n.), filozof din școala lui Platon, s-a ocupat de primele probleme teoretice ale Mecanicii; lui i se atribuie descoperirea scripetelui și șurubului.

Aristotel (384—322 î.e.n.) a făcut multe considerații juste asupra staticii, îndeosebi asupra echilibrului. El s-a preocupat și de problema căderii verticale a corpurilor grele, deși această problemă a tratat-o metafizic, elaborînd o teorie după care „corpul tinde spre locul său din natură”. Tot el este primul filozof care abordează problema relativității mișcării.

În opoziție cu Aristotel, materialistii atomiști *Democrit*, *Epicur* și *Lucrețiu* au dezvoltat în Mecanică idei mai apropiate de realitate. Materialiștilor atomiști le aparțin primele afirmații mai clare — deși cu înexactități — asupra căderii corpurilor, asupra structurii materiei etc.

Tot în această epocă (sec. al III-lea î.e.n.) a trăit *Arhimede*, pe care Engels l-a numit unul dintre reprezentanții „cercetării exacte și sistematice” ai antichității. Arhimede (287—212 î.e.n.) a trăit la Siracusa. Mare geometru și mecanician, adevăratul întemeietor al staticii, el rezolvă aproape toate problemele mecanice care s-au pus în timpul său. În lucrările sale „Despre pîrghii”, „Cartea reazemelor” și „Despre echilibrul suprafețelor”, dă teoria pîrghiilor, rezolvă echilibrul sistemului format din două greutăți suspendate pe o bară care se poate roti în jurul unui punct, elaborează regulile compunerii și descompunerii forțelor paralele, dă definiția centrului de greutate, stabilește unele legi de bază ale hidrostaticii și dă indicații cu privire la ceea ce, mult mai târziu, va fi numit momentul forțelor.

Sfîrșitul orînduirii sclavagiste se caracterizează în Mecanică prin lupta dintre teoriile metafizice și teoriile progresiste ale materialiştilor atomiști, primele ieșind adeseori învingătoare.

În timpul formațiunii social-economice feudale nu apare ceva excepțional în Mecanică, pînă spre sfîrșitul acestei epoci, — cînd se fac unele ipoteze noi asupra mișcării, se studiază mașini de irigat terenurile agricole și, în legătură cu construirea fortificațiilor, se studiază mai îndeaproape natura forțelor și problema echilibrului.

O dată însă cu dezvoltarea construirii orașelor și drumurilor, meșteșugarilor, comerțului, fortificațiilor, navigației etc. se dezvoltă și Mecanica. Îndeosebi, în timpul Renașterii — o dată cu înflorirea artelor și celorlalte științe — Mecanica la un avînt considerabil. Acum se face saltul de la Statică la Dinamică. Studiul mișcării și al forțelor apare pe primul plan. Se stabilesc formulele privitoare la mișcarea uniform variată și la mișcarea curbilinie a punctului material. În secolul al XVII-lea și al XVIII-lea se formulează principiile fundamentale ale Mecanicii.

Marelui artist și învățat *Leonardo da Vinci* (1452—1518) îi datorează Mecanica multe dintre ideile originale și îndrăznețe care l-au trasat căile de dezvoltare în viitor. Leonardo

da Vinci execută primele cercetări experimentale asupra căderii libere a unui corp greu; introduce noțiunea de moment, sub denumirea de „momento” sau pîrghie potențială. La Leonardo da Vinci găsim unele indicații cu privire la principiul deplasărilor virtuale, la legile echilibrului, la egalitatea acțiunii cu reacțiunea etc.; el studiază ciocnirile și stabilește unele reguli privitoare la frecări.

Evenimentul cel mai revoluționar al acestei epoci îl constituie apariția concepției lui N. Copernic (1473–1543) asupra sistemului heliocentric al lumii și tot acum apar lucrările lui Johann Kepler (1571–1630) cu privire la mișcarea planetelor în jurul Soarelui: celebrele trei legi ale lui Kepler.

Însă, întreaga epocă e dominată de lucrările lui Galileo Galilei (1564–1642), unul dintre cei mai mari învățați ai epocii, luptător neîmfricat împotriva învățăturii geocentriste și a scolasticii, descoperitor al multor legi de bază ale Mecanicii clasice.

Galileo Galilei formulează noțiunile principale ale Cinematicii (viteza și accelerația) și stabilește formula căderii corpurilor; el introduce noțiunea de forță ca agent mecanic și emite ideea relativității mișcării.

Se poate spune că istoria Dinamicii începe de la Galilei. El formulează legea inerției aproape sub forma în care o cunoaștem și astăzi, teoria mișcării corpului greu pe un plan înclinat, legile mișcării corpului lansat (demonstrînd că traiectoria unui proiectil azvîrlit în vid, sub un unghi oarecare față de orizont, este o parabolă). Sub forma „regulii de aur” a Mecanicii, el arată că — în ceea ce privește mașinile mecanice — cît se cîștigă în forță, se pierde în viteză.

Un merit deosebit al lui Galilei constă în faptul că el atribuie o deosebită importanță experimentării practice, dovedind toate afirmațiile sale prin experiențe; el aduce, în acest mod, în știință, o poziție materialistă, în locul scolasticii — bazată numai pe textele anticilor — care se practicasă pînă la el.

În continuare, ucenicul lui Galilei, E. Toricelli (1608–1647) dezvoltă teoria mișcării corpurilor grele și a stabilității echilibrului, rezolvînd și unele probleme de hidrostatică.

Simon Stevin (1548–1620) utilizează geometria la rezolvarea problemelor de Mecanică și clarifică modul cum trebuie folosite momentele forțelor la studiul sistemelor în echilibru; elaborează principiul compunerii forțelor; dă metoda de calcul a presiunii apei pe fundul și pereții vaselor.

G. Roberval (1602–1675) își axează statica sa pe studiul mașinilor (mașini simple, balanțe, mașini de împletit frîghii etc.) și alte probleme practice ale tehnicii, generalizînd realizările anterioare, în special în ceea ce privește calculul momentelor și compunerea forțelor.

R. Descartes (1596–1650) emite noțiunea cantității de mișcare, deși cu erori; se preocupă de teoria ciocnirii corpurilor; arată caracterul infinitesimal al principiului deplasărilor virtuale și studiază îndeaproape problema mișcării corpurilor și problema inerției.

Cr. Huygens (1629–1695) a formulat sub o formă incipientă noțiunile de accelerație centrifugă și centripetă și de moment de inerție. A studiat de asemenea mișcările oscilatorii, centrul de oscilație al pendulului fizic, ciocnirea corpurilor elastice.

Isaac Newton (1643–1727) a formulat cele trei principii fundamentale ale Mecanicii clasice; a aprofundat studiul forțelor; a studiat și descoperit legile fundamentale ale opticii; a pus bazele calculului infinitesimal. Mecanica newtoniană se bazează pe studiul naturii pe numeroase experiențe și pe un deosebit simț de generalizare teoretică.

Galilei și Newton pot fi considerați ca fondatorii Mecanicii clasice.

P. Varignon (1654–1722) a aplicat metodele geometrice în statică, a definit complet noțiunea de moment al forței și a dat cunoscuta teoremă despre momentul rezultantei forțelor.

R. Hooke (1635–1703) a determinat experimental relațiile dintre eforturi și deformări la corpurile elastice; iar E. Mariotte (1620–1684) a studiat încovolirea gînzilor primate ca elemente elastice; Mariotte a lucrat mult și în domeniul Mecanicii gazelor și lichidelor.

În acest fel, către sfîrșitul secolului al XVII-lea, bazele Mecanicii erau temeinic stabilite, Mecanica devenind de acum înainte o știință independentă.

O importanță deosebită pentru dezvoltarea ulterioară a Mecanicii teoretice o are în această epocă apariția unor tratate de Mecanică în care se sistematizează realizările anterioare, fapt care va născă aplicarea cunoștințelor mecanice în practică. Astfel sînt tratatele lui Wallis, Varignon, Poinsot, S. K. Kotelnikov și S. P. Guriev.

În secolul al XVIII-lea, datorită studiilor făcute pentru nevoile producției — mașini, construcții etc. — și pentru nevoile navigației — cercetări astronomice etc. — s-a ajuns la elaborarea de soluții generale pentru rezolvarea problemelor Mecanicii punctului material și corpului solid.

Astfel, *L. Euler* (1707–1783) a dezvoltat dinamica punctului material, utilizând calculele analitice și diferențiale. El este creatorul Mecanicii corpului solid, studiind, primul, metoda mișcării corpului solid cu ajutorul celor trei unghiuri cunoscute sub numele de *unghiurile lui Euler*. El este fondatorul Hidrodinamicii și al teoriei stabilității barelor elastice. De asemenea, a făcut importante cercetări în domeniul Rezistenței Materialelor (de exemplu momentele de inerție) și Mecanicii cerești.

Daniel Bernoulli (1700–1782) a dat în „Hidrodinamica” cunoscutele ecuații fundamentale pentru Hidraulică.

C. A. Coulomb (1736–1806) a stabilit legile experimentale ale frecării de alunecare și de rostogolire, a studiat torsiunea firelor stabilind legile torsionii etc.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) s-a ocupat cu Mecanica cerească, publicând renumita sa lucrare „Tratat despre Mecanica cerească” în care face cunoscutele ipoteze privitoare la geneza sistemului solar.

M. V. Lomonosov (1711–1765) studiază problema interacțiunii a două corpuri, face formulări ale bazei teoriei cinetice a propagării căldurii și este primul care formulează principiul conservării energiei.

Spre mijlocul secolului al XVIII-lea încep a fi formulate și principiile variaționale ale Mecanicii.

Astfel, în 1744, *P. Maupertuis* (1698–1759) formulează *principiul minimei acțiuni*, pe care îl aplică la explicarea legilor reflexiei și refracției luminii și la teoria ciocnirilor. Demonstrația matematică a acestui principiu a fost dată însă de Euler, iar generalizarea a fost făcută sub prima formă de Lagrange și complet de Jukovski.

Problema importantă a deplasărilor virtuale, ca principiu care reflectă condițiile generale de echilibru ale sistemelor, își găsește formularea în secolul al XVIII-lea, sub o primă formă (care pornea de la lucrări mai vechi ale lui Galilei și ale altora) în lucrările lui *Jean Bernoulli* (1667–1748); cel care îi va da formularea științifică va fi J. Lagrange, mai târziu.

Tot în această epocă *d'Alembert* (1717–1783) publică „Traite de Dynamique”, unde este formulată celebra sa metodă privitoare la rezolvarea problemelor de dinamică prin metoda cinetostatică.

Acela care a dezvoltat însă considerabil partea teoretică a Mecanicii a fost *J. Lagrange* (1736–1813), în deosebi în lucrarea sa fundamentală „Mecanica analitică” (1788). Lagrange a creat Mecanica analitică pe baza principiului deplasărilor virtuale; a încercat să demonstreze analitic, atât cât era posibil, principiul deplasărilor virtuale; a demonstrat analitic principiul lui d'Alembert; a rezolvat problema oscilațiilor mici ale unui sistem de corpuri etc. Se poate spune că apariția „Mecanicii analitice” a lui Lagrange a determinat direcțiile principale de dezvoltare ulterioară a Mecanicii analitice.

Paralel s-au dezvoltat, în noile condiții de producție, și alte capitole ale Mecanicii. Într-adevăr, capitalismul pentru a obține profituri maxime — cere mijloace de producție mai puternice și cu randament mai bun, cere construirea de fabrici și uzine mari, cere mijloace de transport rapide și căi de comunicație bune. Toate acestea necesită mașini complexe și construcții mari, deci și teorii noi pe baza cărora să se poată calcula mașinile și construcțiile. Aceasta va duce la dezvoltarea rapidă a Mecanicii teoretice și aplicate.

L. M. Navier (1785–1836), *B. de Saint-Venant* (1797–1886) și *G. Lamé* (1795–1870) fac studii aprofundate de Statică, de Rezistența Materialelor și de Elasticitate.

M. V. Ostrogradski (1801–1861) studiază legăturile dependente de timp, introduce noțiunea de legături exprimate analitic prin inegalități și aplică pentru astfel de legături, principiul deplasărilor virtuale. Ostrogradski a dat o nouă formă ecuației generale a Dinamicii, ecuație care integrată în raport cu timpul va duce la expresia cea mai generală a principiului Hamilton—Ostrogradski.

W. R. Hamilton (1805–1865) aplică calculul variațional în Mecanică și formulează principiul care-l poartă numele.

Mijlocul secolului al XIX-lea se caracterizează prin dezvoltarea metodelor generale de integrare a ecuațiilor diferențiale ale Dinamicii. În această privință, dau metode noi: *S. Poisson* (1781–1842), *K. G. Jacobi* (în 1866) și alții.

În secolul al XIX-lea, au fost și alți corifei ai Mecanicii: *L. Foucault* (1819–1868), care demonstrează posibilitatea principiului de a dovedi, fără cercetări astronomice, rotația zilnică a Pământului; în 1888, matematiciana rusă *S. P. Kovalevskaia* (1850–1891) a rezolvat încă un caz privitor la problema rotației corpului greu în jurul unui punct fix. În 1893, matematicianul rus *A. M. Liapunov* (1857–1918) a demonstrat că cele trei cazuri ale mișcării corpului rigid cu un punct fix (studiate de Euler, Lagrange și Kovalevskaia) sunt cazuri unice.

Probleme noi ale balisticii exterioare, au fost puse și rezolvate de *N. V. Maievski* (1823—1892), *A. N. Krilov* (1863—1945) etc.

Una dintre principalele probleme care se pune la acea epocă este și problema stabilității echilibrului, studiile fiind luate pe seama lui Lagrange.

Demonstrarea matematică a stabilității echilibrului sistemului conservativ a fost generalizată de *P. Dirichlet* (1805—1859); *E. Routh* studiază de asemenea stabilitatea mișcării, aplicând metoda oscilațiilor mici, iar *N. E. Jukovski* (1847—1921) face cercetări și aplicații la stabilitatea avioanelor în aer. Dar cel care a studiat riguros stabilitatea mișcării și a creat teoria și cele mai generale metode pentru rezolvarea ei a fost *A. M. Liapunov*, în lucrarea sa „Problema generală a stabilității mișcării” (1892). Studiile lui Liapunov au fost dezvoltate ulterior de *V. V. Stepanov* (1889—1950).

Progresele importante, în secolul al XX-lea, ale Electrotehnicii, reglării automate a mașinilor, Opticii, Acusticii, sînt legate de numele lui *Liapunov*, *A. Poincaré*, *L. Mandelstam* (1879—1944), *N. D. Papalexi* (1880—1947) și alții.

Apare și o nouă ramură a Mecanicii, Dinamica corpurilor cu masă variabilă. Bazele teoriei mișcării corpurilor cu masă variabilă au fost puse de *V. I. Meșcerski* (1859—1935) în lucrarea sa „Dinamica punctului material cu masă variabilă”. Ecuația generală a dinamicii punctului cu masă variabilă a servit ca bază teoriei mișcării reactive, care a fost aprofundată de *K. E. Tioolkovski* (1857—1935). Pornind de la aceste teorii — dezvoltate în mod creator de știința sovietică — la 4 octombrie 1957 a fost lansat de U.R.S.S. primul satelit artificial al Pămîntului, iar la 2 ianuarie 1959 prima rachetă cosmică, care a devenit prima planetă artificială a sistemului solar.

Din nevoia de a putea explica numeroase fenomene care în Mecanica clasică apăreau ca inexplicabile, în secolul al XX-lea se reexaminează multe dintre tezele și principiile Mecanicii newtoniene. Ca o consecință, apar: Mecanica relativistă, Mecanica cuantică, Mecanica ondulatorie, Mecanica statistică etc. Numele savanților *A. Einstein*, *Max Planck*, *de Broglie*, *Fok*, *Vavilov* etc. sînt strîns legate de aceste mecanici noi și sînt bine cunoscute în toată lumea.

În țara noastră, trebuie să menționăm pentru activitatea lor, în domeniul Mecanicii teoretice și aplicate, pe *Anghel Saligny*, *Spiru Haret*, *Andrei Ioachimescu*, *Ion Ionescu*, *Gh. Em. Filipescu*, care au lăsat importante studii de Mecanică teoretică și aplicată și au executat numeroase lucrări ingineresti cu care ne mîndrim.

Un avînt deosebit a luat Mecanica după 1945, cînd s-au putut face studii deosebit de importante în noile laboratoare înființate, cu amplele mijloace de experimentare care au fost puse la dispoziția oamenilor de știință din țara noastră.

NOTAȚII, SIMBOLURI

(A)	sistem de puncte materiale;	\bar{F}_n	componenta normală a forței \bar{F} ;
A	arie;	\bar{F}_τ	componenta tangențială a forței \bar{F} ;
\bar{a}	acclerație;	$\bar{F}_{ij}, \bar{F}_{ji}$	forțe interioare ale sistemului de puncte materiale;
a_x, a_y, a_z	proiecțiile accelerației \bar{a} pe axele $Oxyz$;	\bar{F}_{red}	forța redusă la elementul conducător al mașinii;
a_θ, a_ϕ, a_ψ	proiecțiile accelerației \bar{a} în coordonate sferice;	\bar{F}_t	forță complementară de transport;
a_r, a_φ, a_θ	proiecțiile intrinseci ale accelerației \bar{a} ;	\bar{F}_c	forță complementară a lui Coriolis;
a_0	acclerația originii O a triedrului mobil T față de triedrul fix T_1 ;	\bar{F}_m	forța rezultantă medie din timpul ciocnirii;
\bar{a}_a	acclerația absolută;	f	frecvența;
\bar{a}_r	acclerația relativă;	f	constanta de atracție universală;
a_t	acclerația de transport;	f	săgeata parabolei de echilibru a firului;
\bar{a}_c	acclerația Coriolis;	\bar{g}	acclerația gravitației;
a	amplitudinea mișcării oscilatorii;	\bar{G}	greutatea corpului;
A	amplitudinea oscilației forțate;	\bar{g}	versor în planul tangent la suprafață în triedrul Darboux;
b	numărul barelor unui sistem articulat;	\bar{g}	normala geodezică a curbei firului;
C	centrul de curbură principal;	H	impuls;
C	centrul forțelor paralele, centrul de greutate, centrul maselor;	H	distanța polară în poligonul forțelor;
C	constanta arilor;	H	componenta orizontală a tensiunii N din fir;
CP	cal putere;	h	ore;
\bar{C}	forța centrifugă propriu-zisă;	h	înălțime;
(D)	domeniul de existență al funcției U;	I	centrul instantaneu de rotație;
E	energie, energie cinetică;	I	moment de inerție geometric;
E_m	energie mecanică;	I_x, I_y	moment de inerție geometric axial;
e	excentricitate;	I_0	moment de inerție geometric polar;
$\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{F}_A$	forțe;	I_{xy}	moment de inerție geometric centrifugal;
F_x, F_y, F_z	proiecțiile forței F pe axele $Oxyz$;		

i	rază de inerție (girație);	M_g	moment giroscopic;
i	raport de transmitere;	m	momentul cuplului motor (la roata motoare);
J	centrul instantaneu al accelerațiilor;	n	turație;
J	moment de inerție mecanic;	n	versorul normalei la suprafață în triedrul lui Darboux;
$J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{\Delta}$	momente de inerție axiale;	n	numărul nodurilor unei grinzii cu zăbrele;
$J_{xOy}, J_{yOz}, J_{zOx}$	momente de inerție planare;	\bar{N}	reațiune normală;
J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}	momente de inerție centrifugale;	N	tensiunea din fir;
J_1, J_2, J_3	momente de inerție principale;	O	originea sistemelor de axe;
J_p	moment de inerție polar;	p_i	forță de legătură;
J_{red}	momentul de inerție redus al mașinii;	\bar{p}	percușiune;
k	coeficient de elasticitate;	p	pasul șurubului, pasul roților dințate;
k	coeficient de restituire (coeficient de elasticitate la ciocnire);	P	putere mecanică;
\bar{K}	moment cinetic;	P_m	putere motoare;
K	curbura;	P_u	putere utilă;
K_1	torsiunea curbei;	P_p	putere pierdută;
l	lungime;	q	forța repartizată asupra firului;
L	lucru mecanic;	Q	forța rezistentă a unei mașini simple;
L_m	lucru mecanic motor;	\bar{r}	vector de poziție;
L_r	lucru mecanic rezistent;	R, r	raze;
L_u	lucru mecanic util;	\dot{r}	viteza punctului definit de \bar{r} ;
L_p	lucru mecanic pasiv;	\ddot{r}	acelerația punctului definit de \bar{r} ;
m_i	masa punctul A_i ;	\bar{R}	vectorul rezultat al unui sistem de forțe efectiv aplicate;
M	masa sistemului de puncte materiale;	\bar{R}	reațiune (forță de legătură);
M_{red}	masa redusă la elementul conducător al mașinii;	s	spațiu, arc;
m	modulul roților dințate;	s_0	spațiu inițial;
$M_O(\bar{F})$	momentul forței \bar{F} în raport cu punctul O ;	s	cursa pistonului
\bar{M}_O	vectorul moment rezultat al unui sistem de forțe;	s	secunda;
\bar{M}_i	moment încovoietor;	\dot{s}	viteza;
M_f	momentul cuplului de frecare de rostogolire;	\ddot{s}	acelerația;
M_n	momentul cuplului de frecare de pivotare;	s	coeficient de frecare la rostogolire;
		S	moment static;
		t	timp;
		T	perioadă;
		T	tensiune;
		$T_1(\equiv O_1x_1y_1z_1)$	triedru cartezian fix;

T	componenta reacțiunii după o direcție tangentă la legătură (forță de frecare de alunecare);	\ddot{x}	proiecția accelerației \ddot{a} pe Ox ;
t_{ij}	componentele unui tensor de ordinul al doilea;	α	unghi;
U	funcție de forță;	α	cosinusul director cu axa Ox ;
$ \vec{v} $	modulul vectorului \vec{v} ;	$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$	versorii axelor $Ox_i (i=1, 2, 3)$;
\vec{v}	viteză;	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	cosinusurile directoare ale unei axe Δ cu axele Ox, Oy, Oz ;
\ddot{v}	accelerație;	α_j	$(j=1, 2, 3)$ proiecțiile vectorului $\bar{\alpha}_i$ pe axele Ox_j ;
v_x, v_y, v_z	proiecțiile vitezei \vec{v} pe axele $Oxyz$;	β	cosinusul director cu axa Oy ;
v_p, v_n, v_a	proiecțiile vitezei \vec{v} în coordonate sferice;	$\bar{\beta}$	versorul binormalei în triedrul lui Frenet;
\vec{v}_0	viteza inițială;	γ	greutatea specifică;
\vec{v}_0	viteza originii O a triedrului mobil T față de triedrul fix T_1 ;	γ	cosinusul director cu axa Oz ;
v_C	viteza centrului de greutate (a centrului maselor);	Δ	dreaptă, axă, suportul unui vector;
\vec{v}_a	viteza absolută;	Δ	determinant;
v_r	viteza relativă;	δ^k_j	simbolul lui Kronecker;
\vec{v}_t	viteza de transport;	δ	gradul de neregularitate al funcționării mașinilor;
\vec{v}_m	viteza medie;	$\delta\vec{r}, \delta x$	deplasări virtuale;
V	volumul unui corp;	δL	lucru mecanic virtual;
V	energie potențială, funcție potențială	ϵ	accelerație unghiulară;
V	componenta verticală a tensiunii N în fir;	0	unghi polar (în coordonate polare);
W	watt;	0	longitudine;
W	energie, lucru mecanic,	0	unghiul de rotație (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);
x, x_1, \dots, x_i	abscisă;	λ	latitudine;
X, X_1, \dots, X_i	proiecția unei forțe pe Ox ;	λ	lungime de undă;
\dot{x}	proiecția vitezei \vec{v} pe Ox ;	μ	coeficient de frecare de alunecare;
\ddot{x}	proiecția accelerației \ddot{a} pe Ox ;	μ_0	coeficient de aderență;
x	elongația mișcării oscilatorii;	μ	densitate, masa specifică a corpurilor;
y, y_1, \dots, y_i	ordonata unui punct;	\bar{v}	versorul normalei principale în triedrul lui Frenet;
Y, Y_1, \dots, Y_i	proiecția unei forțe pe Oy ;	v	coeficient de frecare de pivotare;
\dot{y}	proiecția vitezei \vec{v} pe Oy ;	v	frecvența mișcării oscilatorii armonice;
\ddot{y}	proiecția accelerației \ddot{a} pe Oy ;	ρ	masă specifică;
z, z_1, \dots, z_i	cota unui punct;	ρ	rază de curbura principală;
Z, Z_1, \dots, Z_i	proiecția unei forțe pe Oz ;	ρ_t	rază de torsiune;
\dot{z}	proiecția vitezei \vec{v} pe Oz ;	ρ_n	rază de curbura normală a suprafeței;

ρ_g	rază de curbură geodezică;	$\bar{\omega}$	viteza unghiulară;
$\bar{\rho}$	versorul vectorului de poziție r ;	$\dot{\omega}$	acclerația unghiulară;
$\bar{\tau}$	versorul tangentei în triedrul lui Frenet;	ω_m	viteza unghiulară medie (de regim, nominală) a mașinii;
τ_{ij}	tensor simetric;	ω_{max}	} valorile extreme ale vitezei unghiulare la o mașină;
$\tau(\bar{F})$	torsorul forțelor;	ω_{min}	
φ	unghi de frecare;	ω	pulsația mișcării periodice;
φ	unghiul de rotație proprie (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);	Ω	viteza areolară;
φ	latitudine;	ω_i	vectorul asociat al tensorului antisimetric ω_{ij} ;
Φ	forță de aderență;	ω_{ij}	tensorul antisimetric;
ψ	unghiul de precesie (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);	η	randament mecanic.

PARTEA ÎNTÎIA
GENERALITĂȚI

I. NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL

A. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

§ 1. **Scalari. Vectori.** Există mărimi care pot fi definite complet prin câte un singur număr, valoarea lor numerică nedepinzând de un reper anumit. Astfel de mărimi se numesc *mărimi scalare* sau simplu *scalari*. Studiul lor se face de obicei în aritmetică.

S-a constatat însă, de-a lungul timpului, că mărimile scalare nu sînt singurele care intervin în știință și în tehnică, și că mai pot fi și altfel de mărimi, de exemplu mărimi prezentînd un caracter geometric, cunoscute sub numele de *mărimi vectoriale* sau simplu *vectori*. Mărimile vectoriale intervin foarte deseori, după cum vom vedea, în Mecanică.

Vom presupune că spațiul de care ne ocupăm aici, în care au loc fenomenele mecanice, este spațiul euclidian E_3 cu trei dimensiuni. De multe ori, însă, va fi avantajos să simplificăm spațiul E_3 reducîndu-l, în mod convențional, la două dimensiuni E_2 sau la o dimensiune E_1 .

Spațiul euclidian E_1 este *linia dreaptă oarecare* D , avînd o *direcție* dată. Dacă se fixează pe dreapta D un sens de deplasare — de exemplu sensul de la A la B (fig. 1.1) — dreapta devine o *axă* (și zicem axa Δ). Cum orice dreaptă este susceptibilă de a avea două sensuri de-a lungul ei, unul opus celuilalt, rezultă că o dreaptă poate fi considerată ca *suportul* a două axe.

Poziția unui punct P pe axă ne sugerează să folosim distanța r de la un punct O al axei (pe care îl vom lua drept origine, reper) ca element determinant. Punctului P îi va corespunde o distanță r și un sens de la O spre P . Dacă acest sens este același cu sensul axei, se va lua distanța r cu semnul plus; în caz contrar, se va lua r cu semnul minus. În acest mod, poziția punctului P va fi perfect determinată pe axă, cu ajutorul distanței r afectată de semnul convențional $+$ sau $-$. Distanța r , astfel



Fig. 1.1

determinată, constituie *vectorul de poziție* al punctului P pe dreaptă și se înseamnă cu \vec{r} . Putem marca în P o săgeată pentru a pune și mai mult în evidență caracterul vectorial al mărimii $\vec{r}(=\overrightarrow{OP})$. Valoarea pozitivă a distanței r este *valoarea absolută* sau *modulul* vectorului \vec{r} , pe cînd distanța

r afectată de semnul $+$ sau $-$ este valoarea scalară a vectorului \vec{r} . Valoarea absolută a vectorului \vec{r} se notează prin simbolul $|\vec{r}|$.

Vom considera, în special, punctul U situat la o distanță egală cu unitatea, de O , în partea pozitivă a dreptei. Vom însemna vectorul de poziție al acestui punct cu \vec{i} ; acest vector unitar se numește *versor*.

Versorul \vec{i} va putea reprezenta și sensul axei Δ , încât se poate scrie

$$\vec{i} = \text{vers } \Delta.$$

Să notăm cu x distanța OP prevăzută cu semnul $+$ sau $-$ după cum vectorul de poziție \vec{r} are sensul lui \vec{i} sau nu. Mărimea x este, evident, o cantitate algebrică, o *mărime scalară*. Ea este identică de altfel cu *mărimea scalară* a vectorului \vec{r} definit mai înainte. Vom conveni a scrie

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i},$$

indicând prin aceasta că vectorul \vec{r} este determinat de mărimea algebrică x și de versorul \vec{i} . Observăm astfel că mărimea vectorială este de fapt o mărime orientată, având un suport, o origine și o intensitate scalară.

Punctul O este caracterizat de $x=0$; vectorul corespunzător de poziție este *vectorul zero* pe care-l vom însemna tot cu O , ca în aritmetică.

Dacă ne putem imagina o a doua axă similară Δ' având versorul respectiv \vec{j} , atunci vectorul \vec{r}' de poziție al unui punct B de pe Δ' va fi dat de formula analogă

$$\vec{r}' = y \vec{j},$$

unde y este o mărime algebrică analogă lui x .

Spațiul euclidian E_2 cu două dimensiuni este planul. Un punct A al planului este determinat prin vectorul său de poziție \vec{r} față de un punct O din plan,

$$\vec{r} = \vec{OA}.$$

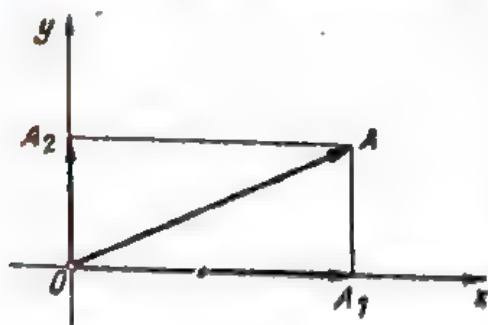


Fig. 1.2

Totodată, ne putem folosi de două axe pentru a caracteriza vectorul de poziție \vec{r} . Fie axele Ox și Oy perpendiculare în O una pe alta (fig. 1.2) și fie \vec{i} și \vec{j} versorii respectivi, adică

$$\vec{i} = \text{vers } Ox, \quad \vec{j} = \text{vers } Oy.$$

Dacă A_1 este proiecția punctului A pe Ox , OA_1 va fi vectorul de poziție al lui A_1 pe Ox , adică mărimea vectorială care determină în mod univoc poziția lui A_1 pe Ox . O vom însemna, după cum am convenit mai înainte prin $x\vec{i}$. În mod analog, A_2 fiind proiecția punctului A pe Oy , vectorul său de poziție va fi $y\vec{j}$. Având, dându-ni-se poziția punctului A în plan, obținem vectorii $x\vec{i}$ și $y\vec{j}$ în mod univoc, și reciproc, dându-ni-se $x\vec{i}$ și $y\vec{j}$

obținem în mod univoc punctele A_1 și A_2 , și, prin construcția geometrică din fig. 1.2, punctul A . Vectorul de poziție \vec{r} al punctului A are componentele $x\vec{i}$ și $y\vec{j}$, iar punctul A , coordonatele x și y față de sistemul xOy , ceea ce putem scrie sub formă

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Această formă se numește *forma hipercomplexă a vectorului \vec{r} în baza \vec{i}, \vec{j}* . Mărimile algebrice x, y sînt *valorile scalare* ale vectorilor $x\vec{i}$ și respectiv $y\vec{j}$, adică ale componentelor lui \vec{r} după axe.

Axele Ox, Oy din fig. 1.2 constituie un *sistem drept* pentru că, presupunînd că ele se află într-un plan orizontal, rotația axei Ox de 90° pentru a se suprapune peste Oy se face în sensul invers mersului acelor unui ceasornic (dimpotrivă, sistemul format de Ox și de prelungirea axei Oy ar fi un sistem *sîng*).

Observăm că și în acest caz coordonata x a vectorului r după Ox este un număr pozitiv sau negativ, după cum vectorul $x\vec{i}$ are același sens sau nu cu versorul \vec{i} al axei Ox . Dacă însemnăm cu (\vec{r}, \vec{i}) unghiul ($\geq 0, \leq \pi$) pe care-l fac cei doi vectori \vec{r} și \vec{i} între ei, vom avea

$$x = |\vec{r}| \cos(\vec{r}, \vec{i}),$$

unde am însemnat cu $|\vec{r}|$ lungimea pozitivă a vectorului \overline{OA} , valoarea absolută sau modulul vectorului \vec{r} . În mod analog vom scrie

$$y = |\vec{r}| \cos(\vec{r}, \vec{j}).$$

Aceste două formule ne dau relația evidentă

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Observăm că mai putem scrie:

$$\cos(\vec{r}, \vec{i}) = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos(\vec{r}, \vec{j}) = \frac{y}{|\vec{r}|}.$$

Pentru cazul special în care lungimea r este egală cu unitatea, vectorul de poziție \vec{r} devine un versor, iar coordonatele sale după axe devin chiar cosinusurile directe ale vectorului.

Alt caz special, $r=0$, arată că vectorul zero poate avea orice direcție.

Spațiul euclidian E_3 cu trei dimensiuni are trei axe. A treia axă este perpendiculară Oz , în O , pe planul xOy și fie \vec{k} versorul ei

$$\vec{k} = \text{vers } Oz.$$

Un astfel de sistem se numește *drept*, întrucît sensul rotației axei Ox , pentru a coincide cu Oy , corespunde cu sensul în care e rotit un șurub drept pentru

a avansa în sensul versorului \vec{k} . (Dacă în loc de Ox am fi luat drept a treia axă, prelungirea lui Oz dincolo de planul xOy , am fi avut un sistem stîng). Vom întrebuița de regulă sistemul drept.

Exemplu. Potrivit acestei definiții, rotația diurnă a Pămîntului în jurul axei polilor dirijată de la S la N este rotația unui triedru drept în jurul axei Oz . De asemenea, luînd drept axă Oz normală la planul eclipticii, și anume semidreapta care face un unghi ascuțit cu axa polilor SN , mișcarea Pămîntului pe ecliptică este determinată de rotația unui triedru drept în planul xOy .

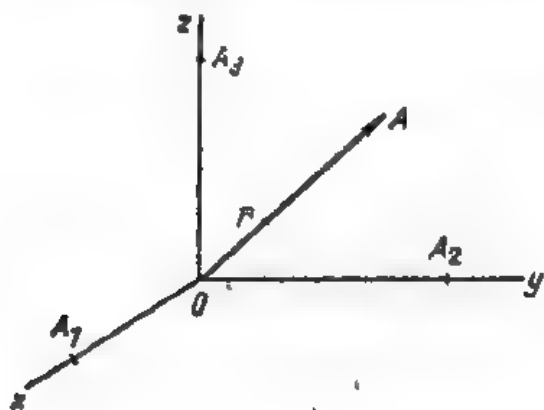


Fig. 1.3

Vectorul de poziție \vec{r} al unui punct A din spațiu (fig. 1.3) se va determina cu ajutorul proiecțiilor sale pe axe.

Vom proiecta punctul A în A_1 pe Ox , în A_2 pe Oy , în A_3 pe Oz . Punctele A_1, A_2, A_3 sînt univoc determinate, deci și vectorii respectivi de poziție $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$. Reciproc, cunoscînd punctele A_1, A_2, A_3 , se determină în mod univoc punctul A .

Vom conveni să scriem

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.1)$$

și vom spune că vectorul de poziție \vec{r} are *componentele* $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$, iar punctul A , *coordonatele* x, y, z față de axele triedrului $Oxyz$ (acestea din urmă sînt valorile scalare ale vectorilor $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$).

De la vectorii de poziție se poate trece la un *vector* în general, păstrîndu-i însușirile următoare: o lungime AB afectată de o direcție și de un sens. Așadar, vectorul este asimilat unui segment dirijat AB ,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Proiecțiile punctelor A și B pe axe vor determina trei vectori $v_x\vec{i}, v_y\vec{j}, v_z\vec{k}$, astfel încît putem scrie

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (1.2)$$

Acești trei vectori sînt *componentele* vectorului \vec{v} după axe, iar mărimile v_x, v_y, v_z sînt *coordonatele* vectorului \vec{v} după aceleași axe. Așadar, coordonatele v_x, v_y, v_z sînt *valorile scalare* ale vectorilor $v_x\vec{i}, v_y\vec{j}, v_z\vec{k}$; ele sînt numite, uneori, și proiecțiile vectorului pe axele de coordonate. Punctul A (fig. 1.4) este punctul de aplicație, iar punctul B este extremitatea vectorului \vec{v} ; dreapta AB face parte din *suportul* sau *linia de acțiune* a vectorului. Cînd se face abstracție de punctul de aplicație al vectorului, avem

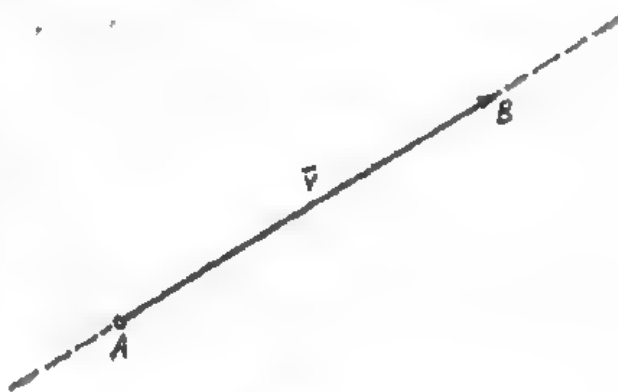


Fig. 1.4

vectorul liber. În cazul cînd vectorul este legat de punctul său de aplicație, avem *vectorul legat* (sau fixat); în acest caz, va trebui să se dea și vectorul de poziție al punctului său de aplicație, pentru determinarea completă a vectorului. În fine, cînd punctul de aplicație se poate lua oriunde pe suportul vectorului, avem *vectorul alunecător* (glisant).

Vectorul \bar{p} de lungime egală cu unitatea, situat pe suportul vectorului \bar{v} și avînd același sens cu \bar{v} , este *versorul* lui \bar{v} :

$$\bar{p} = \text{vers } \bar{v}.$$

Punctul de la infinit al suportului unui vector \bar{v} îi determină *direcția*. Doi vectori paraleli între ei au aceeași direcție, sensul putînd fi însă diferit.

§ 2. **Proiecții.** Proiecția A' a unui punct A pe o dreaptă D (fig. 1.5) sau pe un plan P (fig. 1.6) se află la intersecția proiectantei cu dreapta, respectiv cu planul considerat. De obicei, proiectanta va fi o perpendiculară prin A (pe dreaptă sau pe plan) afară de cazuri excepționale în care se va menționa caracterul special al proiectantei.

Proiecția unui vector $\bar{v} (= \overline{MN})$ pe o dreaptă D (fig. 1.7) sau pe un plan P (fig. 1.8) se va găsi proiectîndu-i extremitățile; se obține astfel cîte un nou vector, al cărui sens va fi determinat prin sensul de deplasare

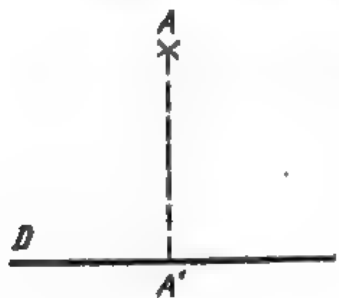


Fig. 1.5

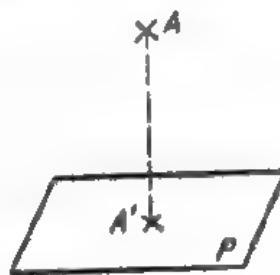


Fig. 1.6

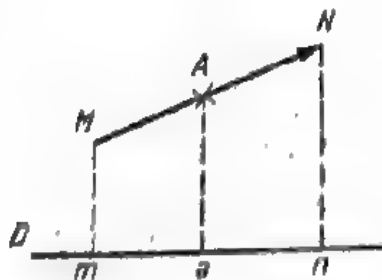


Fig. 1.7

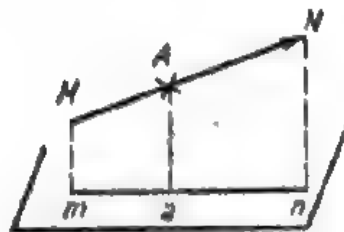


Fig. 1.8

a proiecției a a punctului A de pe vectorul \bar{v} , cînd A se deplasează de la M la N .

Proiecția unui vector \bar{v} pe o axă Δ (fig. 1.9), care se înțeamnă cu

$$\text{pr}_{\Delta} \bar{v},$$

este dată de relația

$$\text{pr}_{\Delta} \bar{v} = |\bar{v}| \cos \alpha, \quad (1.3)$$

în care am notat cu α unghiul dintre versorul $\bar{\rho}$ al vectorului \bar{v} și versorul $\bar{\rho}_0$ al axei, Δ , adică

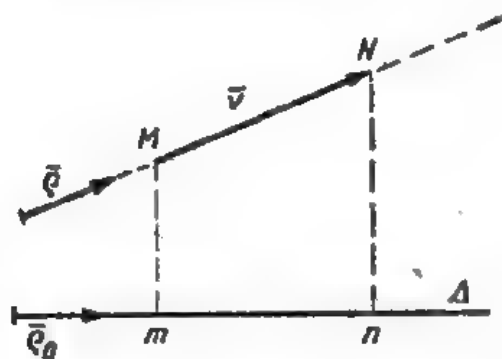


Fig. 1.9

$$\alpha = (\bar{\rho}, \bar{\rho}_0).$$

Observăm că putem scrie

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \text{pr}_x \bar{v} \\ v_y &= \text{pr}_y \bar{v} \\ v_z &= \text{pr}_z \bar{v}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

dacă notăm cu pr_x proiecția pe axa Ox etc; iar mărimile v_x, v_y, v_z vor fi *proiecțiile vectorului \bar{v} pe axele reperului $Oxyz$* .

În cazul când vectorul \bar{v} este un versor (vector unitate) relația (1.3) devine

$$\text{pr}_{\Delta} \bar{v} = \cos \alpha, \quad (1.5)$$

iar relațiile (1.4) vor da

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \cos (\bar{v}, \bar{i}), \\ v_y &= \cos (\bar{v}, \bar{j}), \\ v_z &= \cos (\bar{v}, \bar{k}). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora vom scoate din (1.4)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (1.7)$$

Relațiile (1.3), (1.4) ne dau posibilitatea să calculăm proiecțiile pe **axe** când ni se dă vectorul în lungime, direcție și sens. Invers, dându-ni-se proiecțiile v_x, v_y, v_z , putem calcula pe $|\bar{v}|$ din (1.7) și pe $\cos (\bar{v}, \bar{i}), \cos (\bar{v}, \bar{j}), \cos (\bar{v}, \bar{k})$ din (1.3), (1.2). Excepție face vectorul de proiecții nule $v_x = v_y = v_z = 0$, adică vectorul *zero* (pe care-l vom însemna cu 0); direcția și sensul acestuia rămân nedeterminate, dar lungimea sa este nulă.

Schimbarea axelor de coordonate. În cazul când vectorul liber \bar{v} este determinat prin proiecțiile sale, trebuie să observăm că aceste proiecții pot fi luate în mod arbitrar, trei mărimi scalare oarecare. Trebuie totuși să menționăm că ele se deosebesc de scalarii obișnuiți, întrucât valoarea lor se schimbă o dată cu axele de coordonate la care raportăm vectorul. Dacă

ne raportăm la vectorul de poziție al punctului P (fig. 1.10), ne putem da seama imediat de această proprietate. Într-adevăr, vectorul de poziție \vec{OP} al punctului P are drept proiecții cele trei coordonate carteziene ale punctului față de axe; la o schimbare a axelor de coordonate (păstrând, de pildă, originea O), coordonatele punctului P se schimbă și formulele de transformare sînt

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

dacă însemnăm cu x', y', z' coordonatele punctului P față de noile axe de coordonate și cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, ($i=1, 2, 3$) cosinusurile directe ale noilor axe față de cele vechi, conform tabelii

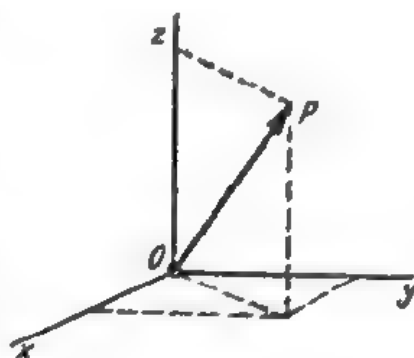


Fig. 1.10

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

(1.9)

Vedem deci, că proiecțiile vectorului de poziție se transformă potrivit formulelor (1.8). Cum însă orice vector \vec{v} poate fi considerat ca fiind vectorul de poziție al extremității sale față de un sistem de axe avînd originea în punctul său de aplicație, deducem că formulele (1.8), puse sub forma

$$\left. \begin{aligned} v_{x'} &= \alpha_1 v_x + \beta_1 v_y + \gamma_1 v_z, \\ v_{y'} &= \alpha_2 v_x + \beta_2 v_y + \gamma_2 v_z, \\ v_{z'} &= \alpha_3 v_x + \beta_3 v_y + \gamma_3 v_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

vor da transformarea proiecțiilor v_x, v_y, v_z în $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$ la schimbarea axelor de coordonate, după tabela (1.9). Așadar, proiecțiile v_x, v_y, v_z sînt scalari de o natură deosebită întrucît ei nu sînt invarianți ai grupului de transformări (1.9); sînt mărimi *pseudo-scalare*, ceea ce însă nu ne va împiedica să îi tratăm ca pe adevărați scalari.

Relațiile (1.10) de transformare pot fi privite ca formule *caracteristice* pentru vectorul de proiecții v_x, v_y, v_z în sensul că, dacă mărimile v_x, v_y, v_z suferă transformarea (1.8), la o schimbare (1.9) a axelor de coordonate, putem spune că ele reprezintă realmente un vector prin proiecțiile sale. Într-adevăr, considerîndu-le drept coordonate carteziene, ele ne dau un punct a cărui poziție este independentă de axele de coordonate. Vectorul are, deci, o existență *intrinsecă*, adică independentă de sistemul de axe la care-l referim.

§ 3. Invarianți. Potrivit celor de mai înainte, modulul unui vector \vec{v} trebuie să rămână neschimbat față de o transformare a axelor de coordonate, adică

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2.$$

Această condiție este satisfăcută de formulele (1.10), cum se constată imediat dacă se ține seama de relațiile

$$\Sigma \alpha_i^2 = \Sigma \beta_i^2 = \Sigma \gamma_i^2 = 1, \quad \Sigma \beta_i \gamma_i - \Sigma \gamma_i \alpha_i = \Sigma \alpha_i \beta_i = 0, \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.11)$$

Mărimea $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ este deci un *invariant* al grupului de transformări (1.9).

Cum legile Mecanicii — în genere, legile fizice — trebuie să fie independente de axele de coordonate la care le raportăm, rezultă că, în acest caz, ele se vor exprima sub forma unor invarianți ai grupului de transformări (1.10).

§ 4. Expresia hipercomplexă a vectorului. *Operații algebrice.* Dacă ne referim la formulele (1.1) și (1.2), vectorul ne apare formal ca un *număr algebric hipercomplex* cu trei unități.

Expresia hipercomplexă a vectorilor ne ușurează în multe cazuri operațiile cu ei. De aceea, analog cu ceea ce se face în algebra numerelor hipercomplexe, vom încerca să definim operațiile dintre vectori folosindu-ne de expresia lor hipercomplexă.

Doi vectori \vec{a} și \vec{b} sînt egali

$$\vec{a} = \vec{b}, \quad (1.12)$$

sau

$$a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad (1.13)$$

prin definiție, atunci cînd coordonatele lor sînt corespunzător egale

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z. \quad (1.14)$$

Așadar, cele trei *relații scalare* (1.14) pot fi reprezentate vectorial printr-una singură (1.12) folosind notația vectorială, care permite o scriere concentrată a ecuațiilor.

Relațiile (1.14) arată că toți vectorii paraleli cu o direcție dată, avînd aceeași lungime și același sens, sînt egali între ei. Această observație este de altfel în concordanță cu faptul că în operațiile analizei vectoriale apar aproape exclusiv vectori liberi. Cu această rezervă se poate spune că coordonatele a_x, a_y, a_z ale unui vector \vec{a} *determină* acel vector \vec{a} .

B. ALGEBRA VECTORILOR

§ 5. Adunarea. Fie $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ și $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ doi vectori oarecare. Vectorul \vec{c} ale cărui coordonate c_x, c_y, c_z sînt determinate prin relațiile

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z, \quad (1.15)$$

se consideră că este suma vectorilor \vec{a} și \vec{b} , ceea ce se notează prin egalitatea

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \quad (1.16)$$

Operația prin care \vec{c} se deduce din \vec{a} și \vec{b} se numește *adunare*. Este evident că numerele c_x, c_y, c_z date de (1.15) reprezintă un vector. Ele satisfac relațiile (1.10).

Adunarea definită în acest mod cuprinde, ca pe un caz particular, și adunarea dintre scalari. Într-adevăr, dacă vectorii \vec{a} și \vec{b} degenerază în vectori pe o singură axă, de pildă pe Ox , cele trei relații de definiție (1.15) ale vectorului \vec{c} se reduc la una singură, de exemplu, la prima dacă luăm axa Ox ca direcție comună a vectorilor \vec{a} și \vec{b} .

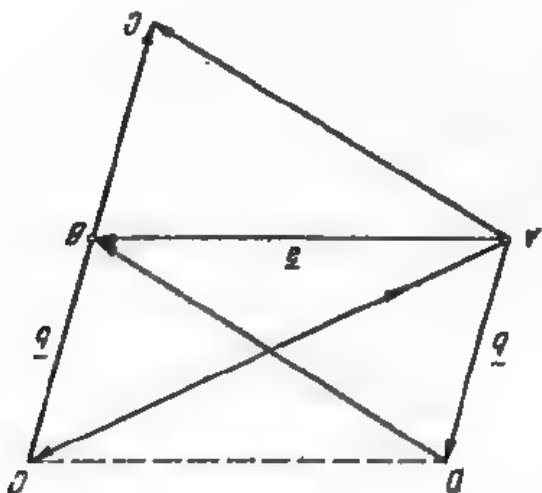
Sunetele dintre scalari (1.15) fiind comutative, rezultă că și operația (1.16) este *comutativă*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Operația adunării este susceptibilă de a avea o reprezentare geometrică de o mare valoare practică.

Vectorul \vec{c} este segmentul dirijat AC (fig. 1.11) care închide linia poligonală obținută punând cap la cap cei doi vectori, $\vec{a}(=AB)$ și $\vec{b}(=BC)$, sau este diagonala trecând prin A a paralelogramului $ABCD$ construit pe segmentele dirijate AB și AD ca laturi. Proprietatea aceasta rezultă imediat din relațiile (1.15). Cum însă construcția geometrică a sumei \vec{c} este independentă de axele de coordonate la care raportăm vectorii, rezultă că operația adunării este un invariant față de grupul schimbărilor de axe sau, mai precis, că vectorul \vec{c} definit prin relațiile (1.15) va suferi aceleași transformări pe care le suferă și vectorul de poziție în cazul când se face o schimbare a axelor la care se referă vectorii \vec{a} și \vec{b} . Construcția din fig. 1.11 se numește *regula paralelogramului*.

Fig. 1.11



Dacă se înțimpă ca vectorul \vec{c} să fie nul, adică

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

În calcule vom ține seama de identitățile

atunci cei doi vectori, \vec{a}, \vec{b} , au aceeași direcție, aceeași lungime, dar sensuri opuse. În acest caz

$$\vec{b} = -\vec{a},$$

$$\vec{a} = -\vec{b},$$

sau

ceea ce dă totodată și regula pe baza căreia se poate trece un termen dintr-o parte în cealaltă a unei egalități.

Dacă avem n vectori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ($n > 2$), cu coordonatele a_{1x}, a_{1y}, a_{1z} ($i=1, 2, \dots, n$), atunci vom defini suma lor ca fiind vectorul

$$\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n \quad (1.17)$$

cu proiecțiile

$$c_x = \sum_{i=1}^n a_{ix}, \quad c_y = \sum_{i=1}^n a_{iy}, \quad c_z = \sum_{i=1}^n a_{iz} \quad (1.18)$$

pe cele trei axe. Se verifică imediat că:

1. Operația este asociativă, adică putem înlocui o parte din vectori prin suma lor (sumă parțială), fără ca suma totală să se schimbe, ori cum am grupa sumele parțiale. În particular, $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3)$.

2. \vec{c} poate fi reprezentat geometric prin segmentul dirijat $\overrightarrow{OA_n}$ care închide conturul poligonal format din vectorii puși cap la cap într-o ordine oarecare, începînd din punctul O și sfîrșind în A_n . În particular, condiția necesară și suficientă ca o sumă (1.17) de vectori să fie nulă este ca linia lor poligonală să fie închisă ($O \equiv A_n$).

O b s e r v a Ț i i. 1°. Adunarea vectorilor se mai numește și *compunerea lor*, suma lor se mai numește și *rezultantă*, \vec{a}_i fiind considerați ca vectori și purtînd numele de *componente*.

2°. Orice vector \vec{a} poate fi considerat ca suma componentelor sale de pe axe de coordonate

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

expresia hipercomplexă a vectorului obținînd astfel un sens operațional cu ajutorul adunării.

3°. Dacă adăugăm vectorul $-\vec{b}$ de ambele părți ale unei identități

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

obținem

$$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b},$$

deoarece $\vec{a} + \vec{b} - \vec{b}$, în virtutea asociativității, este egal cu \vec{a} . Această observație ne dă regula pe baza căreia se poate trece un termen dintr-un membru în celălalt.

4°. Proiecția sumei unor vectori pe o dreaptă D sau pe un plan P este egală cu suma proiecțiilor acelor vectori pe D , respectiv pe P . Rezultă că dacă suma vectorilor este nulă, atunci și suma proiecțiilor va fi nulă. Reciproca nu este întotdeauna adevărată.

5°. Din proprietățile adunării deducem că vectorii alcătuiesc un *grup aditiv abelian* sau un *modul*, față de operația adunării, deoarece adunarea este comutativă, asociativă, vectorul zero lasă neschimbat orice vector și oricărui vector \vec{a} îi corespunde vectorul invers $-\vec{a}$.

§ 6. **Înmulțirea. Produse.** Produsul unui scalar cu un vector. Să considerăm un scalar m și un vector \vec{a} . Prin definiție, vectorul \vec{c} având proiecțiile

$$c_x = m a_x, c_y = m a_y, c_z = m a_z \quad (1.19)$$

este produsul dintre m și \vec{a} și-l vom însemna cu $m\vec{a}$. Operația corespunzătoare o vom numi *înmulțire*, *multiplicare* sau *amplificare*, m și \vec{a} fiind *factorii înmulțirii*.

De altfel, se vede imediat că c_x, c_y, c_z reprezintă un vector, deoarece aceste mărimi satisfac relațiile (1.10).

Din felul cum se determină proiecțiile c_x, c_y, c_z se vede că vectorul \vec{c} are aceeași direcție cu \vec{a} , are mărimea absolută $|m\vec{a}|$ și sensul același sau contrar cu al lui \vec{a} , după cum m este pozitiv sau negativ.

Așadar, vectorul \vec{c} fiind susceptibil de a fi reprezentat printr-un segment dirijat, independent de axele de coordonate, operația care i-a dat naștere are o existență *intrinsecă*.

Vom defini produsul $\vec{a}m$ ca fiind egal cu $m\vec{a}$.

Ca urmare a acestei definiții, putem spune că produsul $m\vec{a}$ este comutativ.

Din definiția produsului se deduc identitățile

$$\left. \begin{aligned} (m+n)\vec{a} &= m\vec{a} + n\vec{a}, \\ m(\vec{a} + \vec{b}) &= m\vec{a} + m\vec{b}, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

n fiind un scalar și \vec{b} un vector. Aceste identități arată că produsul este *distributiv* relativ la ambii factori.

Deducem, de asemenea,

$$m(n\vec{a}) = n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a},$$

adică produsul este și *asociativ*.

În fine, dacă unul dintre factorii produsului $m\vec{a}$ este nul sau dacă ambii factori sînt nuli, produsul este nul și invers, pentru ca produsul $m\vec{a}$ să fie nul trebuie ca cel puțin unul dintre factori să fie nul.

O b s e r v a Ț i i. 1°. Vectorul \vec{a} se mai poate scrie

$$\vec{a} = a\vec{\rho}$$

dacă însemnăm cu $\vec{\rho}$ versorul suportului lui \vec{a} și cu a scalarul reprezentînd proiecția vectorului \vec{a} pe axa $\vec{\rho}$, adică valoarea scalară a vectorului \vec{a} pentru versorul $\vec{\rho}$.

Simbolul $a_x\vec{i}$ capătă astfel un înțeles operațional ca și expresia hipercomplexă

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

2°. Dacă vectorul \vec{a} degenerază într-un scalar, atunci produsul $m\vec{a}$ devine un produs obișnuit dintre doi scalari. Din acest punct de vedere

se poate spune că produsul dintre un scalar și un vector generalizează noțiunea obișnuită de produs din algebra scalarilor.

§ 7. **Produsul scalar sau produsul interior a doi vectori.** Fie \vec{a} și \vec{b} doi vectori. Vom numi *produs scalar al celor doi vectori* mărimea scalară $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, scriind

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.21)$$

Operația se cheamă *înmulțire* sau *multiplicare scalară*, iar vectorii \vec{a} și \vec{b} sînt *factorii înmulțirii*.

Este ușor de verificat că expresia (1.21) a produsului $\vec{a}\vec{b}$ rămîne neschimbată față de transformarea (1.10) adică însemnînd cu $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, și $b_{x'}$, $b_{y'}$, $b_{z'}$ proiecțiile vectorilor \vec{a} și \vec{b} față de axele $Ox'y'z'$, avem

$$a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Produsul scalar este, așadar, un *invariant* al grupului de transformări format prin schimbarea axelor de coordonate. Această proprietate era de altfel necesară, după cele ce am stabilit la § 1, pentru ca produsul scalar definit prin formula (1.21) să aibă un sens.

Din definiția (1.21) a produsului scalar a doi vectori putem deduce următoarele proprietăți:

1. Produsul scalar este o operație *comutativă*,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

2. Produsul scalar este o operație *distributivă*,

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c},$$

ceea ce se vede imediat dacă se observă că $\vec{a}\vec{b}$ este o funcție liniară și omogenă, atît în raport cu proiecțiile vectorului \vec{a} cît și în raport cu acelea ale vectorului \vec{b} .

Expresia geometrică a produsului scalar. Notînd cu (\vec{v}, \vec{i}) , (\vec{v}, \vec{j}) , (\vec{v}, \vec{k}) unghiurile formate de vectorul \vec{v} cu axele Ox , Oy , Oz și observînd că

formula (1.21) se mai poate scrie

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad (1.22)$$

dacă ținem seama de formula cunoscută

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) \cos(\vec{b}, \vec{i}) + \cos(\vec{a}, \vec{j}) \cos(\vec{b}, \vec{j}) + \cos(\vec{a}, \vec{k}) \cos(\vec{b}, \vec{k}) = \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

și deci notăm cu (\vec{a}, \vec{b}) unghiul format de vectorii \vec{a} și \vec{b} . Formula (1.22) ne dă pentru produsul scalar o expresie care este, evident, independentă

de axe de coordonate — încă o verificare a proprietății că produsul scalar este un invariant al grupului format de schimbările axelor de coordonate și că deci operația care-l dă naștere are o existență *intrinsecă*.

Din formula (1.22) mai deducem următoarele proprietăți ale produsului scalar:

3 a) *Produsul scalar dintre doi vectori diferiți de zero este nul cînd cei doi vectori sînt perpendiculari.* Se spune în algebră că factorii unui astfel de produs sînt divizori ai lui zero.

3 b) *De asemenea, avem următoarele identități, privind cazul în care unul dintre factori este zero sau ambii factori sînt zero:*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ precum și } 0 \cdot 0 = 0.$$

4. *Produsul scalar $\vec{a}\vec{b}$ poate fi un scalar pozitiv sau negativ, după cum unghiul dintre cei doi vectori este mai mic sau mai mare decît $\pi/2$.*

5. *Produsul scalar $\vec{a}\vec{b}$ a doi vectori \vec{a} și \vec{b} este egal cu valoarea absolută a unuia dintre ei înmulțită cu proiecția celuilalt pe acesta*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

De aici deducem că produsul scalar al unui vector \vec{a} cu un versor este egal cu proiecția vectorului pe versor; de exemplu

$$a_x = \vec{a}\vec{i}, \quad a_y = \vec{a}\vec{j}, \quad a_z = \vec{a}\vec{k}.$$

Tot de aici se deduce că, înlocuind în produsul scalar $\vec{a}\vec{b}$ unul dintre factori, de exemplu pe \vec{a} , prin proiecția sa pe un plan oarecare trecînd prin \vec{b} , valoarea produsului nu se schimbă.

6. *Produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul valorii sale absolute.* Se poate scrie deci

$$\vec{a}\vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = a^2.$$

7. *Cu versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ se pot forma următoarele produse scalare*

$$\vec{i}\vec{i} = 1, \quad \vec{j}\vec{j} = 1, \quad \vec{k}\vec{k} = 1, \quad \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0, \quad \vec{k}\vec{i} = \vec{i}\vec{k} = 0, \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = 0. \quad (1.23)$$

Cu ajutorul acestor formule și bazîndu-ne pe proprietatea de distribuitivitate a produsului scalar, putem efectua produsul scalar dintre \vec{a} și \vec{b} , aplicînd regulile algebrei scalarilor asupra operației

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}).$$

Obținem astfel,

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

ceea ce constituie o verificare a proprietăților produsului scalar.

Observații. 1°. Produsul scalar al vectorului $a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ prin \vec{b} se obține înlocuind în expresia lui \vec{a} pe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectiv prin b_x, b_y, b_z .

2°. Dacă m este un scalar, atunci

$$(ma)\bar{b} = \bar{a}(mb) = m(\bar{a}\bar{b}).$$

În special, pentru $m = -1$ avem

$$(-a)\bar{b} = \bar{a}(-b) = -(\bar{a}\bar{b}).$$

3°. Dacă vectorii \bar{a} și \bar{b} au ambii o aceeași direcție, atunci ei pot fi priviți ca niște scalari, iar produsul lor scalar devine un produs obișnuit dintre scalari. Din acest punct de vedere, se poate spune că și produsul scalar, ca și produsul dintre un scalar și un vector, poate fi privit ca o *generalizare a produsului din algebra scalarilor*.

4°. Relațiile (1.23) ne arată că produsul scalar nu ne permite să privim vectorul $\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$ oarecare ca fiind un număr hipercomplex în înțelesul obișnuit din *Algebră*, deoarece produsul scalar a doi vectori nu mai este un vector.

Aplicații. 1°. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$. Să se calculeze produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$.

Avem

$$\bar{a}\bar{b} = 2 + 6 - 8 = 0.$$

Observăm că vectorii sînt perpendiculari.

2°. Să se simplifice expresia

$$E = (\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} - \bar{c}) + (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{a}) + (\bar{c} - \bar{a})(\bar{c} - \bar{b}).$$

Se desfac parantezele, se reduc termenii asemenea și se obține

$$E = a^2 + b^2 + c^2 - (\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{c}\bar{a}).$$

§ 8. Produsul vectorial sau produsul exterior a doi vectori. Se definește *produsul vectorial* al vectorului \bar{a} prin vectorul \bar{b} ca fiind un al treilea vector \bar{c} , ale cărui proiecții sînt date de expresiile

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (1.24)$$

Operația se numește *înmulțire* sau *multiplicare vectorială* și se notează prin

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}, \quad (1.25)$$

Vectorul \bar{c} se numește *produsul vectorial* sau *exterior* al vectorilor \bar{a} și \bar{b} , aceștia fiind *factorii produsului*.

Pentru ca definiția produsului vectorial să aibă un sens, va trebui ca numerele c_x, c_y, c_z , date de formulele (1.24), să fie susceptibile de a reprezenta un vector. Proprietatea aceasta a lor se poate arăta cu ajutorul formulelor (1.10) aplicate expresiilor $a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x$. Servindu-ne de relațiile (1.11) dintre $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ și făcînd un calcul simplu vom găsi că între expresiile

$$a_y' b_z' - a_z' b_y', \quad a_z' b_x' - a_x' b_z', \quad a_x' b_y' - a_y' b_x'$$

și expresiile (1.24) există relațiile de transformare (1.10). Am însemnat cu a_x, a_y, \dots, b_z ceea ce devin cantitățile a_x, a_y, \dots, b_z prin transformările (1.10).

Se constată din formulele (1.10) că proiecțiile c_x, c_y, c_z ale vectorului \vec{c} sînt determinanții minori de ordinul al doilea al matricii

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Punînd vectorul \vec{c} sub forma

$$\vec{c} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x), \quad (1.26)$$

observăm că el poate fi considerat egal cu determinantul

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (1.27)$$

dezvoltat după elementele primei linii.

Produsul vectorial a doi vectori \vec{a} și \vec{b} fiind un vector \vec{c} , rezultă că la o schimbare (1.9) a axelor de coordonate, vectorul \vec{c} nu-și schimbă nici lungimea nici poziția față de figura geometrică alcătuită de vectorii \vec{a}, \vec{b} . Această observație ne dă dreptul să luăm un sistem particular de axe, astfel ca expresia vectorului \vec{c} prin proiecțiile sale să apară mai simplă și, deci, calculul elementelor geometrice ale vectorului să fie sensibil ușurat. Vom lua suportul vectorului \vec{a} drept axă Ox și anume, astfel încît vectorul \vec{b} să fie situat în planul xOy în partea $y > 0$ a planului; axa Ox va fi astfel univoc determinată. Față de aceste axe vom avea

$$a_y = a_z = b_z = 0, \quad a_x > 0, \quad b_y > 0.$$

Formulele (1.24) ne vor da

$$c_x = 0, \quad c_y = 0, \quad c_z = a_x b_y > 0.$$

Rezultă că vectorul \vec{c} este dirijat în sensul pozitiv al axei Oz . Observînd relațiile evidente

$$a_x = |\vec{a}|, \quad b_y = |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

pentru valoarea $|\vec{c}| = c_z$ a vectorului \vec{c} , vom obține

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (1.28)$$

Deducem următoarea regulă *intrinsecă* pentru determinarea produsului vectorial \vec{c} dintre vectorii \vec{a}, \vec{b} :

Produsul vectorial \vec{c} dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} este un vector de modul $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, normal pe ambii factori și dirijat astfel, încît triedrul $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

să fie drept, adică rotația vectorului \vec{a} în planul (\vec{a}, \vec{b}) cu un unghi egal cel mult cu π pentru a-l suprapune peste \vec{b} , să coincidă ca sens cu sensul pozitiv de rotație în jurul axei \vec{c} (sensul drept).

Formula (1.28) este susceptibilă de o interpretare geometrică de care ne vom folosi adesea: valoarea absolută a produsului vectorial \vec{c} este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori \vec{a}, \vec{b} , sau cu dublul ariei triunghiului construit cu cei doi vectori.

Proprietăți. Din relațiile (1.24) se deduc identitățile

$$\vec{a} \times (-\vec{b}) = (-\vec{a}) \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b}),$$

sau, mai general,

$$\vec{a} \times (m\vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}),$$

m fiind un scalar oarecare.

Apoi

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Așadar, produsul vectorial nu este comutativ; el își schimbă semnul când schimbăm ordinea factorilor. Din cauza aceasta se zice că produsul vectorial este anticomutativ.

Dacă cei doi factori au aceeași direcție, atunci din (1.27) deducem că produsul vectorial este nul. De altfel, condiția necesară ca un produs vectorial a doi vectori ($\neq 0$) să fie nul, este ca ei să aibă aceeași direcție. În particular, avem

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

În limbaj algebric se spune că produsul vectorial permite existența unor divizori ai lui zero.

Vom observa și identitățile

$$\vec{a} \times 0 = 0 \times \vec{a} = 0, \quad 0 \times 0 = 0.$$

Cu versorii axelor vom putea forma produsele

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0, \\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Deoarece proiecțiile produsului vectorial sînt funcții liniare, omogene față de proiecțiile factorilor, rezultă că operația este distributivă

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Cu ajutorul acestei proprietăți și a relațiilor (1.24) putem dezvolta produsul vectorial dintre \vec{a} și \vec{b} , pus sub forma

$$(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}),$$

pentru a obține expresia (1.26) ca o verificare a proprietăților găsite.

Observație. Relațiile (1.29) ne dau produsul versorilor între ei doi câte doi, sub forma pe care o întâlnim la numerele hipercomplexe

din Algebră. Am văzut că vectorul nu poate fi privit ca un număr hipercomplex față de operația produsului scalar, deoarece acesta schimbă *tipul* factorilor: din doi *vectori* se obține un *scalar*. Produsul vectorial menține tipul factorilor, adică din doi vectori se obține tot un vector prin produsul vectorial. Însă nici acest produs nu îngăduie identificarea vectorului cu un număr hipercomplex, așa cum este el definit în Algebră, deoarece produsul vectorial nu este *asociativ*. Într-adevăr, avem de pildă

$$\begin{aligned}\bar{i} \times (\bar{i} \times \bar{j}) &= \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \\ (\bar{i} \times \bar{i}) \times \bar{j} &= 0.\end{aligned}$$

Această constatare nu ne va împiedica totuși de a dezvolta consecvent o Algebră a vectorilor bazată atât pe produsul scalar a doi vectori cât și pe produsul vectorial. Ea nu va fi, desigur, o Algebră de *numere hipercomplexe*, însă va putea întrebuința cu folos expresia hipercomplexă a vectorului.

Expresia unui vector \bar{a} cu ajutorul unui vector normal \bar{b} . Ca aplicații ne propunem să arătăm că dacă doi vectori \bar{a} , \bar{b} sînt ortogonali, atunci se poate determina un al treilea vector, \bar{c} , astfel încît să avem

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}.$$

Vom arăta mai întîi că dacă am determinat un astfel de vector \bar{c} vom putea găsi o infinitate. Într-adevăr, fie \bar{c}_0 vectorul care satisface relația precedentă. Atunci soluția generală \bar{c} va fi dată de ecuația

$$\bar{b} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c}_0$$

sau încă

$$\bar{b} \times (\bar{c} - \bar{c}_0) = 0,$$

relație satisfăcută dacă vectorul $\bar{c} - \bar{c}_0$ are direcția lui \bar{b} , adică dacă

$$\bar{c} = \bar{c}_0 + \lambda \bar{b},$$

λ fiind un scalar arbitrar. Am demonstrat astfel că dacă putem determina un vector \bar{c}_0 putem determina o infinitate de vectori care să satisfacă relația $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$.

Pentru a găsi valoarea particulară \bar{c}_0 nu avem decît să luăm un vector \bar{c}_0 normal atât pe \bar{a} cât și pe \bar{b} , așa fel ca triedrul \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} să fie drept, valoarea absolută a lui \bar{c}_0 fiind egală cu $\left| \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right|$. Se verifică imediat că \bar{c}_0 corespunde condiției

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}_0.$$

A p l i c a ț i i. 3°. Se dau vectorii

$$\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} + 9\bar{k}, \quad \bar{b} = -15\bar{i} + 25\bar{j} + 30\bar{k}, \quad \bar{c} = 8\bar{i} - 20\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Să se calculeze produsele vectoriale $\bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$ și să se arate că vectorii \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} se găsesc în același plan.

Avem

$$\vec{v}_1 = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & 9 \\ -15 & 25 & 30 \end{vmatrix} = -375 \vec{i} - 165 \vec{j} - 50 \vec{k}.$$

Analog obținem

$$\vec{v}_2 = \vec{b} \times \vec{c} = 750 \vec{i} + 330 \vec{j} + 100 \vec{k},$$

$$\vec{v}_3 = \vec{c} \times \vec{a} = -150 \vec{i} - 66 \vec{j} - 20 \vec{k}.$$

Se observă că

$$\frac{\vec{v}_1}{5} = -\frac{\vec{v}_2}{10} = \frac{\vec{v}_3}{2}$$

și deci vectorii \vec{v}_1 , \vec{v}_2 și \vec{v}_3 sînt paraleli, iar \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sînt coplanari.

4°. Să se simplifice expresia

$$\vec{E} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} + \vec{a}) + (\vec{c} + \vec{a}) \times (\vec{c} + \vec{b}).$$

Se desfac parantezele și se obține

$$\vec{E} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

§ 9. Produs mixt. Expresia

$$\vec{a} (\vec{b} \times \vec{c})$$

reprezintă produsul scalar dintre vectorii \vec{a} și $\vec{b} \times \vec{c}$. Este evident un scalar și se numește *produs mixt* al vectorilor \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Dacă proiecțiile vectorilor \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sînt respectiv

$$a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z, c_x, c_y, c_z,$$

atunci, potrivit formulei (1.26),

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

și produsul scalar $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ se va putea scrie:

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Sub această formă se vede imediat că, ținînd seama de proprietățile elementare ale determinațiilor, putem interverti ordinea operațiilor de înmulțire scalară și vectorială fără ca valoarea produsului mixt să se schimbe adică avem identitatea

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.31)$$

Vom însemna produsul acesta mixt cu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sau simplu $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Este evident că prin această notație nu se produce nici o ambiguitate grație identității (1.31). Mai mult, cele trei probleme mixte, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, obținute prin permutări circulare, sînt egale între ele. Pe de altă parte, avem $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, încît se vede că cele șase produse mixte ce se pot forma cu trei vectori $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ au toate aceeași valoare absolută, trei fiind de un semn și celelalte trei de semn contrar.

Relația (1.30) conduce la o interpretare geometrică interesantă și anume: *valoarea absolută a produsului mixt este egală cu de șase ori volumul tetraedrului construit pe cei trei vectori ca muchii, sau cu volumul paralelipipedului construit pe aceiași vectori* (fig. 1.12), de unde vine și explicația egalității celor trei produse.

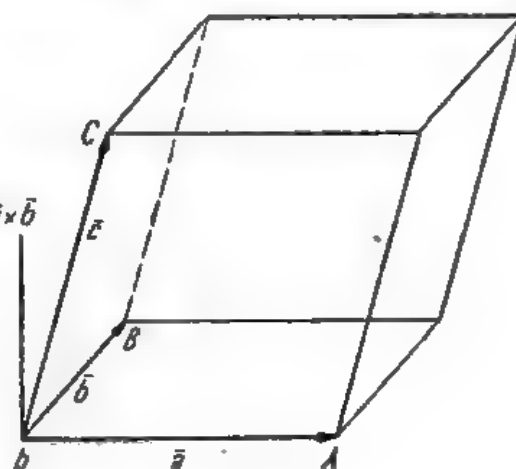


Fig. 1.12

O b s e r v a ț i i. 1°. Dacă versorul vectorului $\vec{a} \times \vec{b}$ face un unghi ascuțit $(< \frac{\pi}{2})$ cu \vec{c} , atunci produsul mixt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este evident pozitiv. În acest caz, se zice că vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează, în această ordine, un sistem *drept*. În ordinea $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ ei vor forma un sistem *stîng*. Așadar, cu vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se pot forma trei sisteme drepte și trei stîngi.

2°. Dacă cei trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} (\neq 0)$ sînt *coplanari*, adică *paraleli cu un plan*, atunci produsul lor mixt este nul.

Într-adevăr, se vede că produsul $\vec{b} \times \vec{c}$ fiind normal pe planul vectorilor \vec{b} și \vec{c} , va fi normal și pe vectorul \vec{a} . Dacă, în particular, doi dintre cei trei vectori sînt *coliniari* (adică au aceeași direcție), atunci produsul lor mixt este nul. Reciproc, dacă produsul mixt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ este nul, vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sînt coplanari. Mai întîi cazul cînd unul din vectori este nul verifică, evident, proprietatea. Dacă nici unul nu este nul, însă dacă toți trei sînt coliniari, adică au aceeași direcție, proprietatea este iarăși verificată. În fine, dacă \vec{b} și \vec{c} nu au aceeași direcție, produsul $\vec{b} \times \vec{c}$ este diferit de zero. Pentru ca produsul său scalar prin \vec{a} să fie nul, trebuie ca \vec{a} să fie normal pe $\vec{b} \times \vec{c}$, adică să fie paralel cu planul (\vec{b}, \vec{c}) .

Putem deci enunța următoarea proprietate:

Condiția necesară și suficientă ca trei vectori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ să fie coplanari este ca produsul lor mixt să fie nul.

Ținând seama de expresia (1.30) a produsului mixt, condiția necesară și suficientă ca trei vectori să fie coplanari se poate pune sub forma

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (1.32)$$

3°. Folosind regula obișnuită de ridicare la pătrat a unui determinant, deducem din (1.30) formula

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{a} & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{b}\bar{a} & \bar{b}\bar{b} & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{c}\bar{a} & \bar{c}\bar{b} & \bar{c}\bar{c} \end{vmatrix}. \quad (1.33)$$

Determinantul din membrul al doilea este cunoscut sub numele de *determinantul lui Gramm*.

Aplicație, 5°. Să se calculeze produsul mixt $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ pentru

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}, \quad \bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Avem

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultatul se explică prin faptul că vectorii \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} sînt coplanari. Într-adevăr,

$$\bar{c} = -\bar{a} + 2\bar{b}.$$

§ 10. Produs dublu. Produsul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ format cu trei vectori \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} trebuie înțeles în felul următor: se face mai întâi produsul vectorial $\bar{b} \times \bar{c}$ și apoi produsul vectorial al acestuia prin \bar{a} . Operația se numește *produs dublu vectorial* sau numai *produs dublu*. Formula care se folosește de obicei pentru expresia acestui produs este

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}), \quad (1.34)$$

numită „formula produsului dublu”. Ea arată că acest produs este un vector situat în planul vectorilor \bar{b} , \bar{c} , ceea ce era evident și fără această formulă, deoarece vectorul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ fiind normal pe vectorul $\bar{b} \times \bar{c}$, adică pe normala planului format de \bar{b} și \bar{c} , se va găsi în planul vectorilor \bar{b} , \bar{c} .

Demonstrația formulei se poate face efectuînd proiecțiile ei pe cele trei axe de coordonate și constatînd că astfel se obțin trei identități. Pe axa Ox , expresia din stînga va avea proiecția

$$a_y(b_z c_y - b_y c_z) - a_z(b_z c_x - b_x c_z),$$

iar cea din dreapta

$$b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Cele două expresii sînt, evident, identice. Cum axa Ox nu are o poziție specială față de vectorii \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , rezultă că și proiecțiile pe celelalte două axe (pe Oy și Oz) conduc la identități. Formula este demonstrată.

Observații. 1°. Produsul $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ este egal cu $-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$, deci poate fi calculat după regula obișnuită

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}\vec{c}).$$

Este evident că, în genere, produsul $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ va fi diferit de $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, adică produsul vectorial nu este asociativ.

2°. Formula (1.34) a produsului dublu ne dă identitatea

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0. \quad (1.35)$$

3°. Cu ajutorul formulelor (1.31) și (1.34) se pot deduce, fără nici o dificultate, formulele

$$\left. \begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{a}[\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{d}\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{d}\vec{b}\vec{c})\vec{a} = (\vec{d}\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{c}\vec{a}\vec{b})\vec{d}. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Din ultima identitate se deduce

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d} = (\vec{d}\vec{b}\vec{c})\vec{a} + (\vec{d}\vec{c}\vec{a})\vec{b} + (\vec{d}\vec{a}\vec{b})\vec{c}. \quad (1.37)$$

Aplicație. 6°. Se dau vectorii \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} orientați respectiv după muchiile VA , VB , VC ale unui tetraedru regulat $VABC$ avînd muchia egală cu l . Să se arate că dublul produs vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ este un vector paralel cu BC .

Să notăm $\vec{a} = \lambda_1 \vec{VA}$, $\vec{b} = \lambda_2 \vec{VB}$, $\vec{c} = \lambda_3 \vec{VC}$. Avem

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 l^2}{2} \vec{VB} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 l^2}{2} \vec{VC},$$

deci

$$\vec{d} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 l^2}{2} (\vec{VB} - \vec{VC}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 l^2}{2} \vec{CB}.$$

Rezultă că vectorii \vec{d} și \vec{CB} sînt paraleli, iar

$$|\vec{d}| = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 l^3}{2} = \frac{abc}{2}.$$

§ 11: Descompunerea unui vector după direcții date. Adunarea vectorilor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ este tot una cu compunerea lor într-o rezultantă. Operația compunerii a n vectori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ într-o rezultantă \vec{c} este totdeauna posibilă și numai într-un singur fel.

Să considerăm acum operația inversă. Ni se dă vectorul \vec{c} și se cere să se determine vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ a căror sumă să fie \vec{c} . Această problemă prezintă, în general, un mare grad de nedeterminare. Pentru a limita nede-

terminarea, vom presupune că *direcțiile componentelor* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *sînt date*.
 Se cere, deci, să se *descompund vectorul* \bar{c} *în* n *componente după direcțiile date*.

Fie \bar{u}_i versorul vectorului \bar{a}_i ($i=1, 2, \dots, n$). Însemnînd cu a_i valoarea scalară a vectorului \bar{a}_i , putem scrie

$$\bar{a}_i = a_i \bar{u}_i.$$

Problema descompunerii vectorului \bar{c} în componente după direcțiile date \bar{u}_i se reduce la rezolvarea ecuației

$$\bar{c} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_n \bar{u}_n,$$

în care scalarii a_i trebuie considerați necunoscuți, iar vectorii \bar{c} , \bar{u}_i cunoscuți.
 Proiectînd ecuația pe cele trei axe de coordonate, obținem

$$c_x = a_1 u_{1x} + a_2 u_{2x} + \dots + a_n u_{nx},$$

$$c_y = a_1 u_{1y} + a_2 u_{2y} + \dots + a_n u_{ny},$$

$$c_z = a_1 u_{1z} + a_2 u_{2z} + \dots + a_n u_{nz},$$

unde am însemnat cu u_{ix} , u_{iy} , u_{iz} proiecțiile vectorului \bar{u}_i pe axe. Avem astfel un sistem de trei ecuații liniare cu n necunoscute scalare a_1, a_2, \dots, a_n .

Cazul $n=1$. Ecuațiile precedente se reduc la

$$c_x = a_1 u_{1x}, \quad c_y = a_1 u_{1y}, \quad c_z = a_1 u_{1z},$$

de unde se vede că problema nu este posibilă decît cu condiția ca

$$\frac{c_x}{u_{1x}} = \frac{c_y}{u_{1y}} = \frac{c_z}{u_{1z}},$$

care e tot una cu condiția ca vectorii \bar{c} și \bar{u}_1 să fie coliniari. Dacă această condiție este îndeplinită, atunci problema are o soluție unică, anume

$$a_1 = \frac{c_x}{u_{1x}}.$$

Se vede geometric că vectorul \bar{a} trebuie să fie egal cu \bar{c} .

Cazul $n=2$. Ecuațiile în a_i devin

$$c_x = a_1 u_{1x} + a_2 u_{2x}, \quad c_y = a_1 u_{1y} + a_2 u_{2y}, \quad c_z = a_1 u_{1z} + a_2 u_{2z}.$$

Sistemul de trei ecuații cu două necunoscute nu are soluție decît dacă

$$\begin{vmatrix} c_x & u_{1x} & u_{2x} \\ c_y & u_{1y} & u_{2y} \\ c_z & u_{1z} & u_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Presupunînd că cel puțin unul dintre cei trei determinanți de ordinul al doilea formați cu coeficienții necunoscutelor este diferit de zero, vom putea determina necunoscutele a_1, a_2 , folosind cele două ecuații corespun-

zătoare determinantului diferit de zero. Dacă însă această a doua condiție nu este îndeplinită, adică dacă toți cei trei determinanți de ordinul al doilea sînt nuli, atunci vectorii sînt coliniari, iar problema se reduce la cazul $n=1$ studiat anterior.

Geometric problema descompunerii vectorului \vec{c} în două componente \vec{a}_1 și \vec{a}_2 revine la a construi un paralelogram căruia i se cunosc diagonala și direcțiile laturilor.

Cazul $n=3$. Pentru $n=3$ relațiile în a_i vor fi

$$c_x = a_1 u_{1x} + a_2 u_{2x} + a_3 u_{3x},$$

$$c_y = a_1 u_{1y} + a_2 u_{2y} + a_3 u_{3y},$$

$$c_z = a_1 u_{1z} + a_2 u_{2z} + a_3 u_{3z}.$$

Presupunînd că este îndeplinită condiția

$$\begin{vmatrix} u_{1x} & u_{2x} & u_{3x} \\ u_{1y} & u_{2y} & u_{3y} \\ u_{1z} & u_{2z} & u_{3z} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ecuațiile considerate vor admite un sistem unic de soluții a_1, a_2, a_3 ; cu alte cuvinte, dacă vectorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ nu sînt coplanari, problema descompunerii vectorului \vec{c} în trei componente are o singură soluție. Geometric, problema revine la a construi un paralelipiped căruia i se cunosc diagonala și direcțiile laturilor.

Dacă determinantul de mai înainte este nul, adică dacă cei trei vectori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sînt coplanari, atunci problema nu este posibilă decît dacă și \vec{c} este coplanar cu $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. În acest caz, dacă am considera numai vectorii \vec{u}_1, \vec{u}_2 , făcînd abstracție de cel de-al treilea, \vec{u}_3 , am da peste cazul $n=2$; prin urmare, vectorul \vec{c} ar putea fi descompus, în general, într-un singur fel după direcțiile \vec{u}_1, \vec{u}_2 ; adăugînd la această soluție și un vector arbitrar din lungul lui \vec{u}_3 și înlocuindu-l apoi prin componentele sale după direcțiile \vec{u}_1, \vec{u}_2 , problema capătă o infinitate de soluții. Dacă doi sau toți trei vectorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sînt coliniari, problema revine la cazurile $n=2$ sau $n=1$.

Cazul $n > 3$. După cum se știe din teoria ecuațiilor liniare, acest caz conduce la nedeterminare sau incompatibilitate. Dacă există cel puțin trei vectori \vec{u}_i care să nu fie coplanari, avem nedeterminare; problema comportă ∞^{n-3} soluții. În cazul contrar, toți vectorii \vec{u}_i ar fi coplanari, astfel încît (ca și în cazul $n=2$) problema nu-l este posibilă decît dacă și \vec{c} este coplanar cu vectorii \vec{u}_i , cînd avem, evident, iarăși nedeterminare (∞^{n-1} soluții). Pentru cazul cu totul special cînd vectorii \vec{u}_i ar fi coliniari, problema nu ar fi posibilă decît dacă \vec{c} are direcția comună cu \vec{u}_i ; rezultă o nedeterminare de ordinul $n-1$ (∞^{n-1} soluții).

C. MOMENTE

§ 12. Momentul unui vector în raport cu un punct. Să considerăm un vector *legat* \vec{a} cu originea în A și un punct oarecare O . (fig. 1.13).

Produsul vectorial $\overrightarrow{OA} \times \vec{a}$ se numește *momentul vectorului* în raport cu punctul O și se notează cu

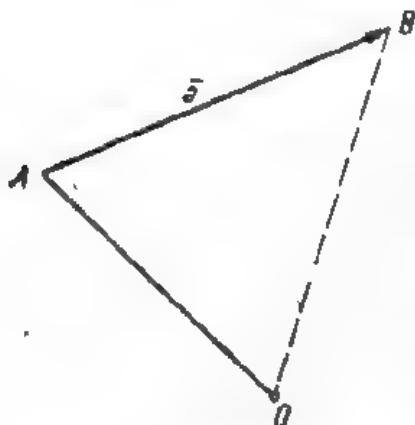


Fig. 1.13

$$\mathfrak{M}_O \vec{a} = \overrightarrow{OA} \times \vec{a}.$$

Vom privi simbolul \mathfrak{M} ca un „operator” aplicat vectorului \vec{a} , așa încît momentul vectorului \vec{a} apare ca rezultatul operației efectuate asupra lui \vec{a} .

Din formula care precede, se deduce că momentul vectorului \vec{a} în raport cu O este un vector perpendicular pe planul OAB , dirijat astfel, încît rotația indicată de vectorul \vec{a} față de O să se facă în sens pozitiv în jurul vectorului moment. Punctul O se numește *originea* sau *polul* momentului.

Din însăși definiția momentului deducem:

Condiția necesară și suficientă ca momentul unui vector în raport cu un punct să fie nul este ca polul momentului să se găsească pe suportul vectorului.

N o t a ț i i. Vom nota în cele ce urmează cu \mathfrak{M} „operatorul” moment. Cînd va fi necesar se va indica și *polul* momentului printr-un indice; de exemplu \mathfrak{M}_O înseamnă „momentul față de polul O ”. Vom folosi adeseori simbolul \vec{M} pentru a desemna „vectorul moment”. De pildă $\vec{M} = \mathfrak{M}_O \vec{a}$.

Reprezentarea geometrică a momentului. Momentul, fiind produsul vectorial dintre doi vectori, este egal în valoare absolută cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori sau cu dublul ariei triunghiului OAB construit cu ajutorul vectorului și al originii O a momentului. Astfel, se deduce, pe altă cale, condiția necesară și suficientă enunțată mai înainte ca momentul să fie nul.

Ne vom ocupa acum de variația momentului:

- a) cînd schimbăm punctul de aplicație al vectorului;
- b) cînd schimbăm polul momentului.

a) *Schimbarea punctului de aplicație.* Dacă mutăm punctul de aplicație al vectorului \vec{a} , din A într-un punct oarecare A' (fig. 1.14) atunci momentul devine

$$\overrightarrow{OA'} \times \vec{a} = \overrightarrow{OA} \times \vec{a} + \overrightarrow{AA'} \times \vec{a}, \quad (1.38)$$

adică, însemnînd cu \vec{M} momentul vectorului \vec{a} cu punctul de aplicație în A și cu \vec{M}' momentul aceluiași vector avînd însă punctul de aplicație în A' , vom avea

$$\vec{M}' = \vec{M} + \overrightarrow{AA'} \times \vec{a}. \quad (1.39)$$

Din această formulă deducem că prin mutarea punctului de aplicație al vectorului \vec{a} din A în A' , momentului \vec{M} față de O i se adaugă vectorul $\overrightarrow{AA'} \times \vec{a}$ care poate fi considerat ca momentul vectorului \vec{a} cu punctul de aplicație în A' față de vechiul punct de aplicație A . Pentru ca momentul să nu se schimbe ($\vec{M}' = \vec{M}$) trebuie să avem

$$\overrightarrow{AA'} \times \vec{a} = 0,$$

adică trebuie ca A' să se afle pe suportul vectorului $\overrightarrow{AB} (= \vec{a})$. Deducem:

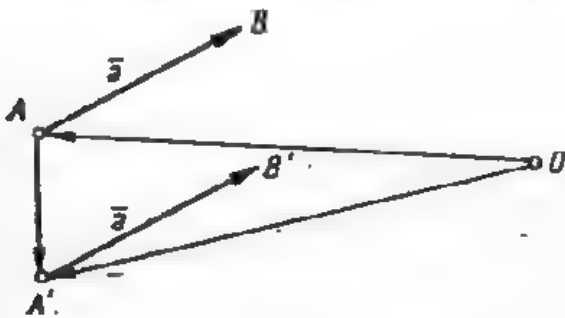


Fig. 1.14

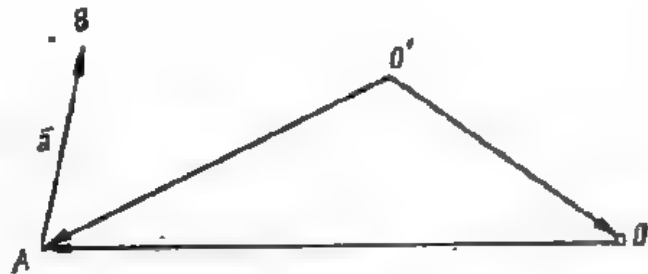


Fig. 1.15

Momentul unui vector $\overrightarrow{AB} (= \vec{a})$ se schimbă dacă-i mutăm punctul de aplicație din A în A' , afară de cazul când A' s-ar afla pe suportul vectorului.

În consecință, putem defini momentul unui vector alunecător ca fiind momentul vectorului luat într-o poziție oarecare a sa pe suport.

Așadar, operatorul „moment” are un înțeles bine determinat, atât pentru vectorul legat cât și pentru vectorul alunecător. Dimpotrivă, momentul unui vector liber nu are un înțeles determinat. De aceea nu vom considera decât momente de vectori legați și de vectori alunecători.

b) Schimbarea originii momentului. Dacă se mută acum polul momentului din O în O' (fig. 1.15), avem

$$\mathcal{M}_{O'} \vec{a} = \overrightarrow{O'A} \times \vec{a} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} + \overrightarrow{OA} \times \vec{a} = \overrightarrow{O'O} \times \vec{a} + \mathcal{M}_O \vec{a}, \quad (1.40)$$

adică momentul unui vector \vec{a} în raport cu un punct O' este egal cu momentul vectorului \vec{a} în raport cu O , la care se adaugă momentul în raport cu O' al aceluiași vector \vec{a} , considerat însă cu originea în O .

Pentru ca momentul să nu se schimbe, va trebui ca produsul $\overrightarrow{O'O} \times \vec{a}$ să fie nul. Lăsând la o parte cazurile fără interes $\vec{a} = 0$ și $\overrightarrow{O'O} = 0$, deducem:

Pentru ca momentul să rămână neschimbat, cînd se schimbă polul momentelor, este necesar și suficient ca polul O să se mute pe direcția vectorului \vec{a} .

Aplicații. 7°. Expresia momentului în funcție de proiecțiile sale pe trei axe ortogonale se poate scrie imediat. Dacă O este originea axelor, \vec{r} vectorul de poziție al punctului A de coordonate x, y, z și a_x, a_y, a_z proiecțiile vectorului \vec{a} , vom avea

$$\mathcal{M}_O \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} = (y a_z - z a_y) \vec{i} + (z a_x - x a_z) \vec{j} + (x a_y - y a_x) \vec{k}. \quad (1.41)$$

8°. Dacă originea O a momentului nu coincide cu originea O_1 a axelor de coordonate (fig. 1.16), ci are coordonatele x_0, y_0, z_0 , expresia momentului devine

$$\mathcal{M}_{O_1} \bar{a} = \overline{O_1 A} \times \bar{a} = [(y - y_0)a_z - (z - z_0)a_y]\vec{i} + [(z - z_0)a_x - (x - x_0)a_z]\vec{j} + [(x - x_0)a_y - (y - y_0)a_x]\vec{k}. \quad (1.42)$$

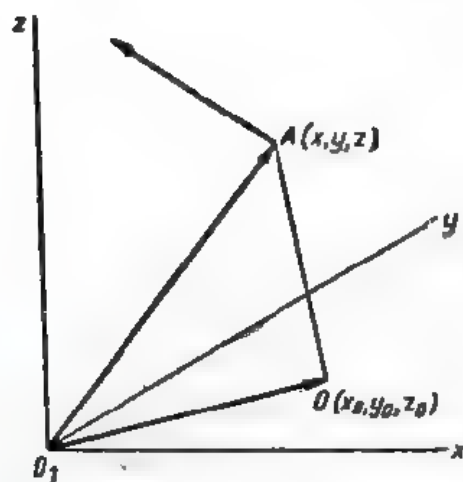


Fig. 1.16

Observații. 1°. Momentele a doi vectori egali, de sens opus și avînd același suport, sînt egale și de sens opus. Proprietatea rezultă imediat din definiția momentului.

2°. Momentul rezultantei mai multor vectori concurenți este egal cu suma momentelor componentelor (teorema lui Varignon). Proprietatea este o consecință a distributivității produsului vectorial.

§ 13. Momentul unui vector în raport cu o axă. Am văzut la § 12 că dacă se schimbă polul momentelor din O în O' , avem relația (1.40)

$$\mathcal{M}_{O'} \bar{a} = \mathcal{M}_O \bar{a} + \overline{O'O} \times \bar{a}.$$

Să considerăm axa $\overline{O'O} (= \Delta)$ avînd sensul versorului \bar{u} (fig. 1.17) și să facem proiecția egalității precedente pe această axă. Fiindcă produsul $\overline{O'O} \times \bar{a}$ este normal pe axă, vom avea

$$\text{pr}_{\Delta} \mathcal{M}_{O'} \bar{a} = \text{pr}_{\Delta} \mathcal{M}_O \bar{a}.$$

Proiecția pe o axă a momentului unui vector \bar{a} față de un punct O al axei, are o valoare independentă de poziția lui O pe axă.

Însă, se va putea scrie

$$\text{pr}_{\Delta} \mathcal{M}_O \bar{a} = \bar{u}(\mathcal{M}_O \bar{a}) = \bar{u}(\overline{OA} \times \bar{a}) = (\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a}).$$

Așadar, produsul mixt $(\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a})$ nu depinde de poziția punctului O pe axă. El poartă numele de moment vectorului \bar{a} față de axa Δ , notîndu-se

$$\mathcal{M}_{\Delta} \bar{a} = (\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a}). \quad (1.43)$$

Mărimea $\mathcal{M}_{\Delta} \bar{a}$ este pozitivă sau negativă, după cum sistemul de vectori

$$\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a}$$

este drept sau stîng (Observația 1° de la § 9), adică după cum \bar{a} are un sens de rotație de la dreapta la stînga în raport cu \bar{u} sau invers, de la stînga la dreapta. De aici deducem că momentul lui \bar{a} în raport cu Oz este pozitiv sau negativ, după cum vectorul \bar{a} arată tendința unei rotații spre stînga sau spre dreapta față de axa Δ .

Observații 1^o. Fie P un plan perpendicular pe axa Δ în punctul O' (fig. 1.18), \bar{a}' proiecția vectorului \bar{a} pe planul P , A' și B' proiecțiile punctelor A și B , respectiv pe planul P ($\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{A'B'} = \bar{a}'$). Vom avea evident

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} + \overline{A'A}, \quad \bar{a} = \overline{AA'} + \bar{a}' + \overline{B'B}.$$

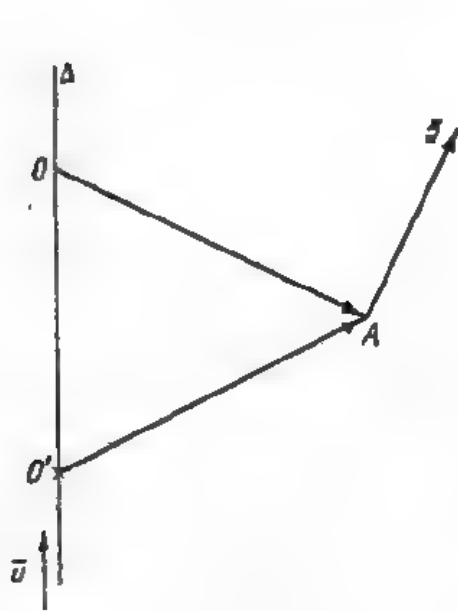


Fig. 1.17

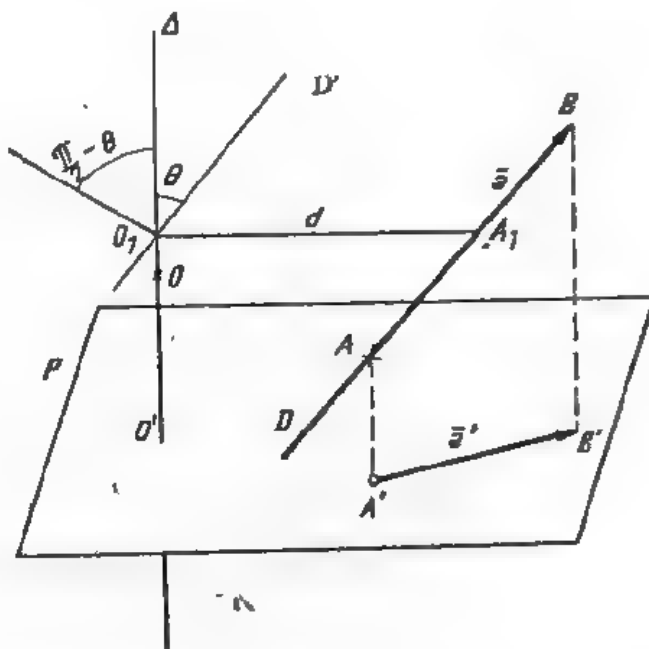


Fig. 1.18

Înlocuind pe \overline{OA} și \bar{a} din expresia $(\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a})$ prin valorile de mai înainte și observînd că vectorii $\overline{OO'}$, $\overline{AA'}$ și $\overline{BB'}$ ne dau produse vectoriale nule cu \bar{u} , obținem

$$(\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a}) = (\bar{u}, \overline{O'A'}, \bar{a}') - \bar{u}(\overline{O'A'} \times \bar{a}').$$

Însă produsul $\overrightarrow{O'A'} \times \vec{a}$ este momentul vectorului \vec{a}' față de O' ; el este dirijat normal pe planul P . Rezultă de aici următoarea proprietate:

Momentul vectorului \vec{a} față de axa Δ este egal cu momentul proiecției vectorului \vec{a} pe un plan perpendicular pe Δ , luat în raport cu punctul O' unde Δ înțeapă planul P .

2°. Fie O_1A_1 (fig. 1.18) perpendiculara comună dintre axa Δ și suportul D al vectorului \vec{a} , și fie Q planul format de Δ și de dreapta D' dusă prin O_1 , paralel la D . Se vede că dreapta O_1A_1 este normală la Q , încît \mathfrak{M}_0, \vec{a} este un vector conținut în planul Q . Să însemnăm cu θ unghiul dintre D' și Δ . Atunci $\frac{\pi}{2} - \theta$ va fi unghiul dintre vectorul \mathfrak{M}_0, \vec{a} și axa Δ , deci proiecția acestui moment pe axa Δ , în valoare absolută, va fi egală cu valoarea sa absolută înmulțită cu $\sin \theta$, adică cu $ad \sin \theta$, însemnând cu d distanța O_1A_1 . Așadar, *valoarea absolută a momentului unui vector*

față de o axă oarecare este egală cu lungimea vectorului înmulțită cu distanța dintre vector și axă și cu sinusul unghiului dintre vector și axă.

Acest moment va fi pozitiv sau negativ, după cum va avea tendința unei rotații spre dreapta sau spre stînga față de axa Δ , așa cum s-a stabilit mai înainte.

Rezultă că, dacă momentul unui vector față de axa Δ este egal cu zero, atunci suportul vectorului sau întîlnește axa Δ ($d=0$) sau este paralel cu axa Δ ($\theta=0$, $\theta=\pi$). Aceste două condiții se pot concentra astfel:

Condiția necesară și suficientă ca momentul unui vector în raport cu o axă să fie egal cu zero este ca vectorul să se găsească în același plan cu axa.

3°. Am găsit mai înainte relațiile (1.41) care dau proiecțiile momentului $M_{O\bar{a}}$ pe cele trei axe de coordonate Ox , Oy , Oz . Din cele ce preced rezultă că aceste expresii vor fi tocmai momentele vectorului \bar{a} față de axe, adică vom avea

$$M_{Ox}\bar{a}=ya_z-za_y, \quad M_{Oy}\bar{a}=za_x-xa_z, \quad M_{Oz}\bar{a}=xa_y-ya_x. \quad (1.44)$$

§ 14. Coordonatele unui vector alunecător. Torsor. Fie \bar{F} un vector alunecător pe dreapta D (fig. 1.19), proiecțiile sale pe cele trei axe de coordonate fiind X , Y , Z . Se înțelege că numerele X , Y , Z nu sînt în stare ele singure să determine vectorul alunecător \bar{F} .

Fie $\bar{r}(x,y,z)$ vectorul de poziție al punctului A de aplicație al vectorului \bar{F} . Dacă însemnăm cu L , M , N proiecțiile pe axele de coordonate ale momentului \bar{M} al vectorului \bar{F} față de originea O a axelor de coordonate, vom avea

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY, \\ M &= zX - xZ, \\ N &= xY - yX. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Se vede că între X , Y , Z , L , M și N există relația

$$LX + MY + NZ = 0, \quad (1.46)$$

care arată că produsul scalar $\bar{F} \cdot \bar{M}$ este nul, ceea ce de altfel este evident, fără nici un calcul, deoarece factorii \bar{F} și \bar{M} ai produsului $\bar{F} \cdot \bar{M}$ sînt ortogonali.

Reciproc, dacă ni se dau doi vectori $\bar{R}(X, Y, Z)$ și $\bar{M}(L, M, N)$ perpendiculari între ei, \bar{R} fiind diferit de zero, atunci există un vector alunecător \bar{F} și numai unul, egal cu \bar{R} și avînd momentul \bar{M} față de O .

$$\bar{F} = \bar{R}.$$

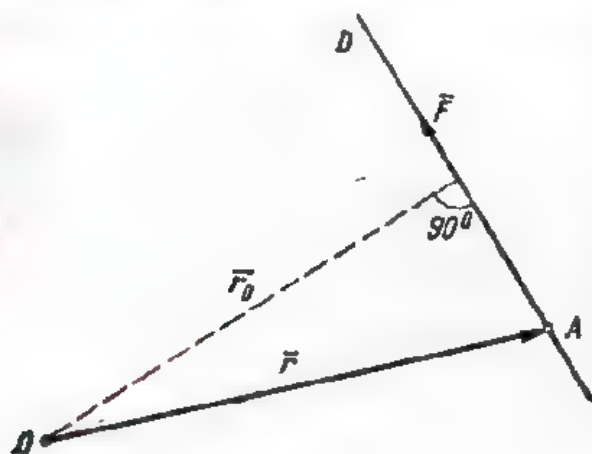


Fig. 1.19

Rămâne să-i determinăm vectorul de poziție \vec{r} al punctului de aplicație; așadar să determinăm pe \vec{r} din ecuația

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.47)$$

Înmultiplicând vectorial această relație, cu \vec{F} la stînga, obținem

$$\vec{F} \times \vec{M} = \vec{F} \times (\vec{r} \times \vec{F}),$$

sau încă

$$\vec{F} \times \vec{M} = \vec{r} F^2 - \vec{F} (\vec{F} \cdot \vec{r}), \quad (1.48)$$

conform formulei produsului dublu vectorial. Vom pune pentru \vec{r} condiția suplimentară de a fi normal pe \vec{F} , adică

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = 0. \quad (1.49)$$

În acest caz, relația (1.48) devine

$$\vec{F} \times \vec{M} = \vec{r}_0 F^2,$$

însemnînd cu \vec{r}_0 valoarea particulară a vectorului \vec{r} corespunzătoare condiției suplimentare (1.49). Deducem

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{F} \times \vec{M}}{F^2}. \quad (1.50)$$

Vectorul \vec{r}_0 astfel obținut este o soluție particulară a ecuației (1.47). Vom avea, deci,

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \quad (1.51)$$

Scăzînd membru cu membru relațiile (1.47) și (1.51) obținem

$$0 = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F},$$

de unde deducem

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{F}, \quad (1.52)$$

λ fiind o mărime scalară arbitrară.

Expresia (1.52) a lui \vec{r} este cea mai generală soluție a ecuației (1.47), după cum se arată la § 8. Ea exprimă proprietatea că locul punctelor care au vectorul de poziție \vec{r} dat de relația (1.52) este dreapta D trecînd prin punctul determinat \vec{r}_0 și fiind paralelă cu \vec{F} .

Dreapta D va fi suportul vectorului alunecător \vec{F} . Rezultă că vectorul alunecător \vec{F} este determinat prin cele șase mărimi X, Y, Z, L, M, N , între care există relația (1.46) și dintre care primele trei nu sînt toate nule. Ele mai poartă numele de *coordonatele Plücker* ale vectorului alunecător \vec{F} .

Din cele ce preced, deducem că perechea de vectori \vec{r}, \vec{M} caracterizează un vector alunecător \vec{F} . Vom numi acest complex de doi vectori *torsorul în O al vectorului alunecător* și-l vom însemna

$$\tau \vec{F} \text{ sau } T \vec{F},$$

privind simbolul τ sau T ca un operator aplicat vectorului \vec{F} . Se mai spune că am făcut „reducerea” vectorului \vec{F} în O . Produsul scalar $\vec{r} \cdot \vec{M}$ se numește

scalarul torsorului, încît putem spune că scalarul torsorului unui vector alunecător este nul.

Observație. Din cele ce preced rezultă că torsorul definește perfect un vector alunecător, în sensul că, dacă se cunoaște torsorul unui astfel de vector, se pot determina proiecțiile vectorului și suportul său. Însă torsorul nu poate determina un vector legat. Într-adevăr, determinarea unui vector legat implică cunoașterea a șase parametri scalari independenți între ei, pe cînd torsorul unui vector alunecător nu implică decît cinci parametri scalari independenți între ei.

Este evident că torsorul unui vector liber nu are nici un înțeles, deoarece momentul unui vector liber este nedeterminat.

§ 15. Momentul reciproc a doi vectori. Să considerăm doi vectori alunecători \vec{F}_1 și \vec{F}_2 determinați respectiv prin torsorii \vec{R}_1 , \vec{M}_1 și \vec{R}_2 , \vec{M}_2 în O . Vom avea evident

$$\vec{R}_1 \vec{M}_1 = 0, \quad \vec{R}_2 \vec{M}_2 = 0. \quad (1.53)$$

Să presupunem că A_1 este punctul de aplicație al primului vector alunecător \vec{F}_1 și A_2 al celui de-al doilea, \vec{F}_2 (fig. 1.20). Vom numi *momentul reciproc* al celor doi vectori alunecători, produsul mixt

$$(\vec{F}_1, \overline{A_1 A_2}, \vec{F}_2). \quad (1.54)$$

Observăm că această expresie își păstrează valoarea dacă mutăm punctele de aplicație A_1 și A_2 în lungul liniilor de acțiune ale vectorilor alunecători. Într-adevăr, înlocuind în expresia (1.54) a momentului reciproc, vectorul $\overline{A_1 A_2}$ prin vectorul $\overline{A'_1 A'_2}$,

$$\overline{A'_1 A'_2} = \overline{A'_1 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A'_2},$$

vom observa că aportul termenilor $\overline{A'_1 A_1}$ și $\overline{A_2 A'_2}$ în această expresie este nul.

Mai observăm apoi că produsul mixt (1.54) își păstrează valoarea dacă schimbăm ordinea factorilor

$$(\vec{F}_1, \overline{A_1 A_2}, \vec{F}_2) = (\vec{F}_2, \overline{A_2 A_1}, \vec{F}_1).$$

Aceste două proprietăți ale expresiei (1.54) erau necesare pentru ca definiția momentului reciproc a doi vectori alunecători să aibă un înțeles determinat.

În fine, mai observăm că valoarea acestui moment este egală cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori \vec{F}_1 , $\overline{A_1 A_2}$, \vec{F}_2 sau cu de șase ori volumul tetraedrului construit pe cei doi vectori alunecători \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , luat cu plus sau minus după cum sistemul de vectori în ordinea precedentă constituie un sistem drept sau stîng. În special, dacă vectorul alunecător \vec{F}_2 este versorul axei Δ , atunci momentul

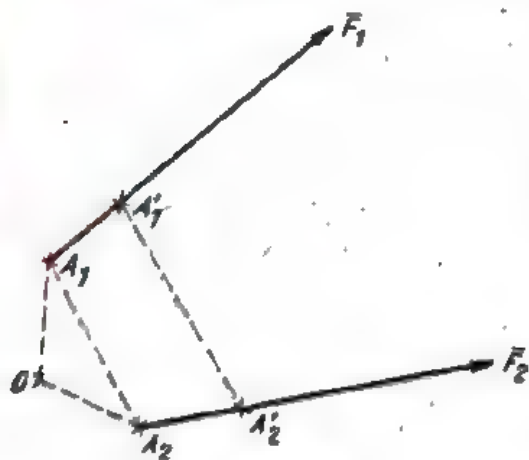


Fig. 1.20

Vom însemna prescurtat un asemenea sistem de vectori prin (\bar{v}) . Vom nota cu $(-\bar{v})$ sistemul vectorilor $-\bar{v}_{ij}$ aplicați respectiv în aceleași puncte. Mai general, vom însemna cu $(\lambda\bar{v})$, λ fiind un scalar oarecare, sistemul vectorilor $\lambda\bar{v}_{ij}$ păstrînd punctele de aplicație. Vom conveni să întrebuițăm și notația $\lambda(\bar{v})$ pentru a reprezenta sistemul $(\lambda\bar{v})$.

Dacă sistemul (\bar{v}) este aplicat în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$) și (\bar{v}') în punctele B_k ($k=1, 2, \dots, n'$) unele dintre punctele A_i putînd coincide cu unele dintre punctele B_k , atunci sistemul (\bar{v}'') compus din toți vectorii sistemului (\bar{v}) aplicați în A_i și din toți vectorii sistemului (\bar{v}') aplicați în B_k este, prin definiție, *suma celor două sisteme* (\bar{v}) și (\bar{v}') . Vom scrie

$$(\bar{v}) + (\bar{v}') = (\bar{v}'') \quad (1.60)$$

Înțelesul pe care-l asumă semnul $=$ în această relație este acela al unei identități.

Operația este, evident, comutativă

$$(\bar{v}) + (\bar{v}') = (\bar{v}')$$

și omogenă, de gradul întâi

$$(\lambda\bar{v}) + (\lambda\bar{v}') = (\lambda\bar{v}'').$$

Din definițiile ce preced, deducem înțelesul operației

$$(\bar{v}) + (\lambda\bar{v}'),$$

ceea ce este tot una cu

$$(\bar{v}) + \lambda(\bar{v}').$$

Pentru cazul special $\lambda = -1$, obținem operația

$$(\bar{v}) + (-\bar{v}'),$$

pe care convenim a o reprezenta mai simplu

$$(\bar{v}) - (\bar{v}').$$

Observăm că fiecare dintre vectorii \bar{v}_{ij} poate fi considerat ca un sistem de vectori redus la unul singur, încît sistemul (\bar{v}) compus din toți vectorii \bar{v}_{ij} apare ca fiind suma sistemelor (\bar{v}_{ij}) compuse din cîte un vector \bar{v}_{ij}

$$(\bar{v}) = \sum_{i,j} (\bar{v}_{ij}).$$

§ 17. Operații elementare de echivalență. Sisteme echivalente. Dacă înlocuim vectorii \bar{v}_{ij} ($j=1, 2, \dots, n_i$), avînd toți punctul de aplicație în A_i , prin vectorii $\bar{v}_{ij'}$ ($j'=1, 2, \dots, n_i'$) avînd același punct de aplicație A_i și îndeplinind condiția

$$\sum_{j=1}^{n_i} \bar{v}_{ij} = \sum_{j'=1}^{n_i'} \bar{v}_{ij'}, \quad (1.61)$$

vom spune că sistemul (\bar{v}) a fost supus la o *operație elementară de echivalență*. Semnul = nu mai reprezintă o identitate ca în relația (1.60), ci numai o „echivalență”.

Definiția operației elementare de echivalență cuprinde și cazul în care punctul A_i nu ar fi punctul de aplicație al vreunui vector din sistemul (\bar{v}) , în care caz condiția (1.61) devine

$$0 = \sum_{j=1}^{n_i} \bar{v}_{ij}. \quad (1.62)$$

Vom însemna cu ω o operație oarecare elementară de echivalență.

Operațiile elementare de echivalență constituie un *grup*, deoarece suma a două operații $\omega_1 + \omega_2$ este echivalentă cu o operație analogă ω_3 , operația inversă $-\omega_1$ este de aceeași natură și, în fine, operația identică $\omega=1$ face parte din grup. Îl vom numi *grupul operațiilor elementare* și-l vom însemna cu G .

Sistem de vectori legați. Dacă toți vectorii \bar{v}_{ij} alcătuind sistemul (\bar{v}) sînt vectori *legați*, atunci sistemul (\bar{v}) se numește *sistem de vectori legați*.

Fie (\bar{v}') un sistem de vectori legați care se poate deduce din sistemul (\bar{v}) de vectori legați supunîndu-l pe acesta la un număr de operații elementare de echivalență. Vom spune că sistemul (\bar{v}') este *echivalent* cu sistemul (\bar{v}) și vom scrie

$$(\bar{v}') = (\bar{v}), \quad (1.63)$$

ceea ce este de altfel tot una cu

$$(\bar{v}) = (\bar{v}').$$

Dacă, în particular, avem

$$\sum_{j=1}^{n_i} \bar{v}_{ij} = 0, \quad \text{pentru } i=1, 2, \dots, n$$

sistemul (\bar{v}) va fi *echivalent cu zero*.

Sistem de vectori alunecători. Dacă toți vectorii \bar{v}_{ij} alcătuind sistemul (\bar{v}) sînt vectori *alunecători*, atunci sistemul (\bar{v}) se numește *sistem de vectori alunecători*.

Pentru sistemele de vectori alunecători noțiunea de *echivalență* este lărgită cu o nouă *operație elementară de echivalență*, anume mutarea punctului de aplicație al unui vector oriunde în lungul *suportului* respectiv (alunecarea vectorului pe suport). Grupul G astfel lărgit (cu alunecarea vectorului pe suport) se numește *grupul lărgit al operațiilor elementare*. Îl vom însemna cu G' , iar operațiile care îl alcătuiesc cu ω' .

În cele ce urmează nu vom considera decît aceste două categorii de sisteme de vectori: sisteme de vectori *legați* și sisteme de vectori *alunecători*.

Așadar, când vom spune sistem de vectori, vom înțelege un sistem de vectori legați sau un sistem de vectori alunecători.

Proprietățile sistemelor echivalente. 1°. Dacă (\bar{v}) și (\bar{v}') sînt două sisteme echivalente de vectori legați sau alunecători,

$$(\bar{v}) = (\bar{v}')$$

și (\bar{w}) un al treilea sistem, vom avea

$$(\bar{v}) + (\bar{w}) = (\bar{v}') + (\bar{w}).$$

2°. Dacă (\bar{v}) este un sistem echivalent cu zero, vom avea

$$(\bar{v}') + \lambda(\bar{v}) = (\bar{v}'),$$

λ fiind un scalar oarecare.

3°. În cazul foarte frecvent când nu se cere discriminarea sistemelor echivalente între ele, toți vectorii \bar{v}_{ij} aplicați aceluiași punct A_i , se pot înlocui prin unul singur, \bar{v}_i , astfel încît să avem

$$\bar{v}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \bar{v}_{ij}.$$

În consecință, vom putea reprezenta totdeauna un sistem de vectori (\bar{v}) printr-un sistem de n vectori \bar{v}_i aplicați respectiv în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$); se obține astfel o formă mai simplă a sistemului (\bar{v}) .

E. TRANSFORMAREA PRIN ECHIVALENȚĂ A SISTEMELOR DE VECTORI ALUNECĂTORI

§ 18. Reducerea la un sistem de trei vectori. Fie (\bar{v}) un sistem de n vectori alunecători \bar{v}_i aplicați respectiv în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$; $n>3$). Grupul de operații care i se aplică este G' . Sistemul (\bar{v}) este un invariant al acestui grup.

Ne propunem a arăta că sistemul (\bar{v}) este echivalent cu un sistem compus din trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aplicați respectiv în trei puncte O_1, O_2, O_3 arbitrar luate în spațiu, îndeplinind numai condiția de a nu fi coliniare. Va trebui să arătăm deci că, prin mijlocirea unor operații ω' aparținînd grupului G' , sistemul (\bar{v}) se transformă în sistemul alcătuit de vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Să ne fixăm atenția asupra unui anumit punct A_i și să-l unim prin trei drepte cu punctele O_1, O_2, O_3 . Presupunînd că nu se află în planul determinat de punctele O_1, O_2, O_3 , cele trei drepte A_iO_1, A_iO_2, A_iO_3 vor determina un unghi solid. Vectorul \bar{v}_i aplicat în A_i va putea fi înlocuit prin cele trei componente ale sale din lungul muchiilor unghiului solid — cu o primă operație ω' . Însă aceste componente pot aluneca în lungul muchiilor-suport, astfel încît punctele lor de aplicație să fie respectiv

O_1, O_2, O_3 — a doua operație ω' . Procedând la fel cu toate punctele A_i , vom obține în fiecare din punctele O_1, O_2, O_3 câte n componente. Însă, componentele din O_1 pot fi înlocuite prin suma lor, datorită unei operații ω' , tot așa cele din O_2 , precum și cele din O_3 . Rezultă că sistemul (\bar{v}) a fost transformat în altul compus din trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aplicați respectiv în O_1, O_2, O_3 .

Pentru demonstrația aceasta am presupus că A_i nu se află în planul $O_1O_2O_3$. Dacă s-ar întâmpla ca A_i să se afle în planul $O_1O_2O_3$, atunci am muta punctul de aplicație al vectorului \bar{v}_i pe suportul său în A'_i ; deci vom putea folosi demonstrația noastră dacă A'_i nu se află în planul $O_1O_2O_3$.

În cazul cînd și A'_i s-ar afla în acest plan, atunci vectorul \bar{v}' se va afla în planul $O_1O_2O_3$, așa că el va putea fi descompus după două oarecare din cele trei drepte A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 .

§ 19. Reducerea la un sistem de doi vectori. Vom arăta acum că sistemul de trei vectori alunecători $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aplicați respectiv în O_1, O_2, O_3 este echivalent cu un altul compus din doi vectori. Într-adevăr, fie D intersecția planului P determinat de vectorul \bar{b} și de punctul O_1 , cu planul Q determinat de vectorul \bar{c} și de punctul O_1 . Dreapta D va trece, evident, prin O_1 . Fie O' un al doilea punct al dreptei D . Dreptele O_2O_1 și O_2O' se vor afla în planul P în care se află și vectorul \bar{b} , deci acest vector va putea fi înlocuit prin componentele sale în lungul dreptelor O_2O_1 și O_2O' . Aceste două componente pot însă aluneca pe suport pentru ca punctele lor de aplicație să ajungă în O_1 și respectiv O' . Procedînd la fel cu vectorul \bar{c} din planul Q , ajungem să înlocuim sistemul vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ printr-un alt sistem: trei vectori concurenți în O_1 și doi în O' . Înlocuind vectorii concurenți prin sumele lor, se obțin în definitiv doi vectori, unul avînd punctul de aplicație în O_1 , celălalt în O' .

P. TORSORUL UNUI SISTEM DE VECTORI (LEGAȚI SAU ALUNECĂTORI). AXĂ CENTRALĂ

§ 20. Definiție. Fie (\bar{v}) un sistem de vectori (legați sau alunecători) \bar{v}_{ij} ($j=1, 2, \dots, n_i$) aplicați în punctele A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Vom construi doi vectori \bar{R}, \bar{M} cu ajutorul operațiilor următoare:

$$\bar{R} = \sum_i \bar{v}_{ij}, \quad \bar{M} = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{v}_{ij}, \quad (1.64)$$

Însemnînd cu \bar{r}_i vectorul de poziție al punctului A_i față de sistemul de axe de coordonate cu originea în O .

\bar{R} este vectorul rezultat al sistemului,

\bar{M} este momentul rezultat al sistemului.

Operația prin care am obținut acești doi vectori o numim *torsor*, punctul O fiind *originea sau polul torsorului*. Vom zice că am efectuat *torsorul în O al sistemului (\bar{v})* .

Așadar, torsorul în O al sistemului (\bar{v}) este vectorul dublu $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}})$. Vom scrie

$$\tau(\bar{v}) = (\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}).$$

Uneori — când este necesar — vom indica, printr-un indice atașat simbolului τ , polul torsorului, scriind

$$\tau_o(\bar{v}) = (\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}).$$

Însemnând cu $\tau \bar{v}_{ij}$ torsorul în O al vectorului \bar{v}_{ij} , vom putea scrie

$$\tau(\bar{v}) = \sum_{i,j} \tau \bar{v}_{ij}, \quad (1.65)$$

adică *torsorul sistemului (\bar{v}) este egal cu suma torsorilor vectorilor (\bar{v}_{ij}) alcătuind sistemul (\bar{v})* .

Dacă cei doi vectori $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{M}}$ sînt nuli, se spune că *torsorul în O al sistemului (\bar{v}) este nul*, ceea ce se întîmplă, de pildă, când toți vectorii \bar{v}_{ij} sînt nuli.

§ 21. Schimbarea originii torsorului. Dacă aplicăm torsorul în O' aceluiași sistem (\bar{v}) , vectorul $\bar{\mathcal{R}}$ nu se va schimba, pe cînd vectorul $\bar{\mathcal{M}}$ va deveni $\bar{\mathcal{M}}'$ dat de relația.

$$\bar{\mathcal{M}}' = \sum \bar{r}_i \times \bar{v}_{ij},$$

unde \bar{r}_i este vectorul de poziție al punctului A_i față de O' . Dar deoarece

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i + \bar{O'O}$$

relația precedentă devine

$$\bar{\mathcal{M}}' = \bar{\mathcal{M}} + \bar{O'O} \times \bar{\mathcal{R}}. \quad (1.66)$$

Formula (1.66) exprimă faptul că *schimbînd originea din O în O' momentul rezultat se mărește cu momentul față de O' al vectorului $\bar{\mathcal{R}}$ avînd punctul de aplicație în O* .

Observînd că produsul vectorial $\bar{O'O} \times \bar{\mathcal{R}}$ este normal pe $\bar{\mathcal{R}}$ deducem din formula (1.66):

Proiecția vectorului $\bar{\mathcal{M}}'$ pe $\bar{\mathcal{R}}$ este egală cu proiecția vectorului $\bar{\mathcal{M}}$ pe $\bar{\mathcal{R}}$ sau, ținînd seama de invarianța vectorului $\bar{\mathcal{R}}$:

Produsul scalar $\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}}$ este același oriunde am lua originea torsorului.

Produsul scalar $\bar{\mathcal{R}} \bar{\mathcal{M}}$ se mai numește și *scalarul torsorului*; el este deci un invariant al grupului de transformări care ne dau schimbarea originii.

Să notăm cu X, Y, Z proiecțiile vectorului $\overline{\mathcal{R}}$ pe axe și cu L, M, N acelea ale vectorului $\overline{\mathcal{M}}_0$. Scalarul $\overline{\mathcal{R}} \overline{\mathcal{M}}_0$ al torsorului va lua forma unui trinom

$$\overline{\mathcal{R}} \overline{\mathcal{M}}_0 = LX + MY + NZ, \quad (1.67)$$

din care cauză el mai este denumit „trinomial invariant”.

Tot din (1.66) deducem că, mutînd originea din O în O' torsorul nu se schimbă dacă

- a) vectorul rezultat $\overline{\mathcal{R}}$ este nul;
- b) originea se mută pe direcția vectorului rezultat $\overline{\mathcal{R}}$.

În special, dacă torsorul în O este nul, el va fi nul în oricare alt punct O' .

§ 22. Forma minimă a torsorului. Axa centrală. Să reluăm sistemul (\bar{v}) de vectori (legați sau alunecători) avînd torsorul în O ,

$$\tau(\bar{v}) = (\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}).$$

Vom presupune $\overline{\mathcal{R}} \neq 0$.

Descompunînd vectorul $\overline{\mathcal{M}}$ în două componente (fig. 1.21), una \overline{P} după $\overline{\mathcal{R}}$ și alta \overline{Q} normală la $\overline{\mathcal{R}}$ avem

$$\overline{\mathcal{M}} = \overline{P} + \overline{Q}.$$

Valoarea absolută a lui $\overline{\mathcal{M}}$ este evident, $(P^2 + Q^2)^{1/2}$.

Am văzut la § 20 că, mutînd originea torsorului din O în O' , componenta \overline{P} nu se schimbă, astfel încît, dacă s-ar întîmpla ca în O' valoarea componentei \overline{Q} să se anuleze, vectorul $\overline{\mathcal{M}}$ ar deveni egal cu \overline{P} ; el ar lua, evident, valoarea sa minimă. Cum $\overline{\mathcal{R}}$ este un invariant al grupului de transformări de origine (O, O') vom putea spune că însuși torsorul $\tau(\bar{v})$ își ia forma minimă în O' . Valoarea scalară a momentului $\overline{\mathcal{M}}_0$, corespunzătoare acestei poziții de minimum a torsorului, va fi evident egală cu scalarul $\overline{\mathcal{R}} \overline{\mathcal{M}}_0$ divizat prin valoarea absolută a vectorului rezultat $\overline{\mathcal{R}}$

$$|\overline{\mathcal{M}}_0| = \frac{\overline{\mathcal{R}} \overline{\mathcal{M}}_0}{|\overline{\mathcal{R}}|} = \frac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \quad (1.68)$$

Dacă O' dă torsorului forma minimă, atunci, în virtutea proprietății b) de la § 19, se vede, că orice punct de pe dreapta D , paralelă la $\overline{\mathcal{R}}$ și trecînd prin O' luat ca origine, îi procură torsorului forma minimă. Se vede, de altfel, că dreapta D este locul geometric al tuturor punctelor O' , avînd această proprietate. Dreapta D se numește *axă centrală a sistemului* (\bar{v}) .

Din cele ce preced, rezultă că este suficient să găsim un singur punct O' al axei centrale pentru a o avea determinată în întregime. Acel punct O' îl vom afla în modul indicat la § 13. Anume, pe perpendiculara $\overline{OO'}$ (fig. 1.21) pe planul $(\overline{P}, \overline{Q})$ — identic cu planul $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_0)$ — vom lua

punctul O' astfel ca distanța $\overline{O'O}$ să fie egală cu cîtul dintre valorile absolute ale vectorilor \overline{Q} și \overline{R}

$$\overline{O'O} = \frac{|\overline{Q}|}{|\overline{R}|}.$$

Vom lua pe O' de partea care realizează un sistem drept din vectorii \overline{Q} , \overline{Q} , $\overline{OO'}$, în această ordine. Punctul O' astfel determinat, îndeplinește condiția cerută, iar pa-

ralela dusă prin O' la \overline{R} va fi, evident, axa centrală a sistemului. Dacă O este originea axelor de coordonate, atunci se verifică ușor că vectorul de poziție al punctului O' este dat de expresia

$$\overline{r}' = \frac{\overline{R} \times \overline{M}}{R^2}, \quad (1.69)$$

încît ecuația vectorială a axei centrale va fi

$$\overline{r} = \overline{r}' + \lambda \overline{R}, \quad (1.70)$$

λ fiind un parametru variabil.

De altfel, ecuația precedentă poate fi pusă și sub altă formă, în care să nu mai apară λ . Într-adevăr, multiplicînd vectorial cu \overline{R} ambii membri, obținem

$$\overline{r} \times \overline{R} = \overline{r}' \times \overline{R}. \quad (1.71)$$

Partea dreaptă a acestei relații se poate pune sub forma

$$\overline{M} - \overline{R} \frac{\overline{M} \cdot \overline{R}}{R^2},$$

ținînd seama de expresia (1.70) a vectorului \overline{r} precum și de expresia cunoscută a produsului dublu. Ecuația (1.71) devine

$$\overline{r} \times \overline{R} = \overline{M} - \overline{R} \frac{\overline{R} \cdot \overline{M}}{R^2}, \quad (1.72)$$

care este o altă formă a ecuației axei centrale.

§ 23. Exemplele carteziene ale axei centrale. Fie X, Y, Z proiecțiile vectorului \overline{R} pe trei axe de coordonate și L, M, N acelea ale vectorului \overline{M} . Se înțelege că, dîndu-ni-se sistemul (v) de vectori (legați, respectiv alunezători), mărimile X, Y, Z, L, M, N pot fi presupuse cunoscute. Însem-

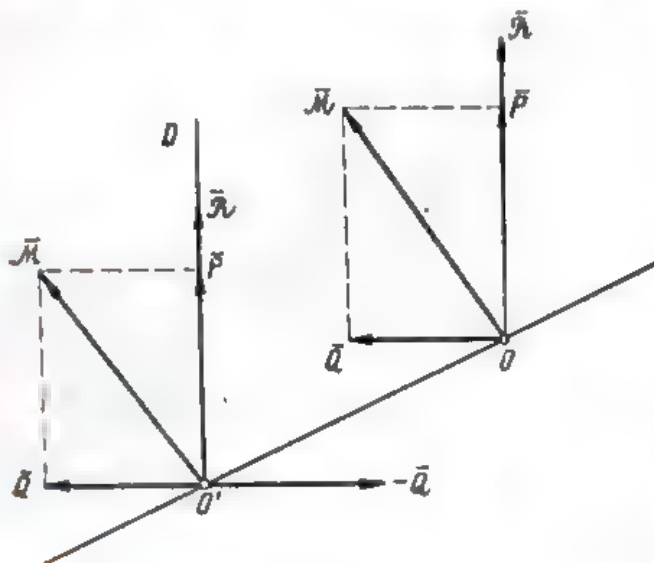


Fig. 1.21

nînd cu x, y, z coordonatele unui punct curent de pe axa centrală — adică proiecțiile lui \bar{r} — ecuația (1.72) proiectată pe axele de coordonate ne dă

$$\left. \begin{aligned} zY - yZ + L &= kX, \\ xZ - zX + M &= kY, \\ yX - xY + N &= kZ, \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

unde

$$k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (1.74)$$

Ecuațiile (1.73) nu sînt independente între ele, ceea ce se vede imediat multiplicîndu-le respectiv cu X, Y, Z și adunîndu-le. Ele se reduc la două ecuații, care se pot pune sub forma

$$\frac{zY - yZ + L}{X} = \frac{xZ - zX + M}{Y} = \frac{yX - xY + N}{Z}. \quad (1.75)$$

Acestea sînt *ecuațiile axei centrale* în coordonate carteziene. Valoarea comună a raporturilor este k .

§ 24. Torsorul este un invariant. Să observăm că o operație ω' lasă neschimbați vectorii \bar{Q} și \bar{M} . Deducem:

Torsorul este un invariant al grupului lărgit G' .

Proprietăți funcționale ale torsorului. Torsorul este un operator liniar. Aceasta înseamnă că el satisface relațiile funcționale următoare:

$$\tau[(\bar{v}) + (\bar{v}')] = \tau(\bar{v}) + \tau(\bar{v}'), \quad (1.76)$$

$$\tau(\lambda \bar{v}) = \lambda \tau(\bar{v}), \quad (1.77)$$

(\bar{v}) și (\bar{v}') fiind două sisteme oarecare de vectori (legați sau alunecători), iar λ un scalar.

C o n s e c u i n Ț e. Din (1.76) rezultă

$$\tau(\bar{v}) = \sum_{i,j} \tau v_{ij}$$

în conformitate cu relația (1.65) de definiție, iar din (1.77)

$$\tau(-\bar{v}) = -\tau(\bar{v}).$$

Din proprietatea de invarianță și din ipoteza

$$(\bar{v}) = (\bar{v}'),$$

deducem

$$\tau(\bar{v}) = \tau(\bar{v}'),$$

adică *torsorul a două sisteme echivalente este același*. În particular, dacă $(\bar{v}') = 0$, adică dacă (\bar{v}) este un sistem echivalent cu zero, avem

$$\tau(\bar{v}) = 0,$$

adică

$$\bar{R}=0, \quad \bar{M}=0.$$

§ 25. Proprietăți caracteristice sistemelor de vectori alunecători. Ultima proprietate, anume aceea că relația $(\bar{v})=(\bar{v}')$ implică relația $\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}')$, are o reciprocă în cazul sistemelor de vectori alunecători, adică relația $\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}')$ implică relația $(\bar{v})=(\bar{v}')$.

O vom demonstra mai întâi pentru cazul particular $\tau(\bar{v})=0$.

Dacă torsorul unui sistem de vectori alunecători (\bar{v}) este nul într-un punct O al spațiului, atunci sistemul (\bar{v}) este echivalent cu zero.

În acest scop, vom transforma sistemul (\bar{v}) prin operații ω' într-un sistem de doi vectori, \bar{w}_1 aplicat în B_1 și \bar{w}_2 aplicat în B_2 . Torsorul fiind un invariant al grupului G' , el va fi nul și pentru sistemul compus din vectorii \bar{w}_1, \bar{w}_2 , adică vom avea în special $\bar{w}_1 + \bar{w}_2 = 0$, adică $\bar{w}_2 = -\bar{w}_1$. Momentul resultant fiind de asemenea nul, vom avea

$$\mathcal{M}_{B_1}\bar{w}_1 + \mathcal{M}_{B_1}\bar{w}_2 = 0,$$

adică $\mathcal{M}_{B_1}\bar{w}_2 = 0$, deci \bar{w}_2 va trece prin B_1 . Așadar, cei doi vectori vor fi egali, de sens contrar și situați pe același suport, adică sistemul lor este echivalent cu zero. Teorema este demonstrată.

Se poate trece acum la cazul general: Dacă (\bar{v}) și (\bar{v}') sînt două sisteme de vectori alunecători, astfel încît torsorul lor este același (într-un punct oarecare), ele sînt echivalente.

Într-adevăr, din relația

$$\tau(\bar{v}) = \tau(\bar{v}'),$$

vom deduce

$$\tau(\bar{v}) - \tau(\bar{v}') = 0,$$

sau încă

$$\tau(\bar{v}) + \tau(-\bar{v}') = 0,$$

deoarece avem

$$\tau(-\bar{v}') = -\tau(\bar{v}')$$

în virtutea relației (1.77). Însă relația precedentă se poate pune sub forma

$$\tau[(\bar{v}) + (-\bar{v}')] = 0,$$

aplicînd identitatea (1.76). Rezultă că sistemul $(\bar{v}) + (-\bar{v}')$, este echivalent cu zero avînd torsorul nul. Conchidem că sistemele (\bar{v}) și (\bar{v}') sînt echivalente: $(\bar{v}) = (\bar{v}')$.

Din aceste proprietăți deducem:

1. Condiția necesară și suficientă ca două sisteme (v) și (v') de vectori alunecători să fie echivalente între ele este

$$\tau(v) = \tau(v') \quad (1.78)$$

pentru un punct din spațiu.

În particular

2. Condiția necesară și suficientă ca un sistem (\vec{v}) de vectori alunecători să fie echivalent cu zero este

$$\tau(\vec{v}) = 0$$

pentru un punct oarecare.

G. VECTORI VARIABILI. ANALIZA VECTORIALĂ

§ 26. **Derivate.** Un vector care își schimbă valoarea o dată cu un parametru oarecare, se spune că este o funcție de acel parametru. Vom considera în Mecanică, în general, vectori care își schimbă valoarea în mod continuu, adică vectori care încearcă o variație ori cât de mică pentru o variație îndeajuns de mică a parametrului, ambele variații tinzând simultan la zero.

Fie \vec{a} un astfel de vector și t parametrul scalar de care depinde. Pentru valoarea $t + \Delta t$ a parametrului, Δt fiind o mică variație a lui t , vectorul \vec{a} devine $\vec{a}' = \vec{a} + \Delta \vec{a}$, unde $\Delta \vec{a}$ înseamnă un vector care adăugat lui \vec{a} să ne dea pe $\vec{a} + \Delta \vec{a}$ (fig. 1.22), deci variația lui \vec{a} în intervalul Δt .

Proiecțiile sale pe axe de coordonate, considerate fixe, sînt Δa_x , Δa_y , Δa_z , adică variațiile în intervalul Δt pe care le încearcă proiecțiile a_x , a_y , a_z ale vectorului \vec{a} . Printr-un proces de trecere la limită, analog celui din Analiza scalară, vom zice că limita raportului $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ cînd această limită există, este derivata vectorului \vec{a} în raport cu parametrul t și o vom însemna cu

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}.$$

În cazul cînd parametrul t este chiar timpul, această derivată se poate nota și prin $\dot{\vec{a}}$.

Cum proiecțiile vectorului $\Delta \vec{a}$ pe cele trei axe sînt respectiv Δa_x , Δa_y , Δa_z , rezultă că proiecțiile vectorului $\frac{d\vec{a}}{dt}$ vor fi

$$\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt},$$

sau, în cazul în care parametrul t este timpul,

$$\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z,$$

adică: proiecțiile vectorului derivat pe cele trei axe sînt tocmai derivatele proiecțiilor vectorului \vec{a} .

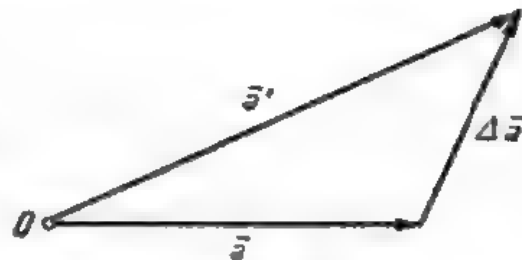


Fig. 1.22

Din felul cum am introdus noțiunea de derivată (independentă de axe) deducem că mărimile $\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z$ satisfac relațiile (1.10) la o transformare a axelor de coordonate, dacă mărimile a_x, a_y, a_z satisfac acele relații.

În expresia hipercomplexă a vectorului variabil,

$$\bar{a} = i\bar{a}_x + j\bar{a}_y + k\bar{a}_z,$$

vom presupune că versorii i, j, k sînt constanți, pe cînd proiecțiile a_x, a_y, a_z variabile. Conform celor de mai înainte, vom avea

$$\dot{\bar{a}} = i\dot{\bar{a}}_x + j\dot{\bar{a}}_y + k\dot{\bar{a}}_z, \quad (1.79)$$

adică vom deriva după regulile obișnuite din analiza scalară.

§ 27. **Derivata funcțiilor de vectori.** Se verifică imediat că derivata unei sume este egală cu suma derivatelor

$$\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b}) = \dot{\bar{a}} + \dot{\bar{b}}. \quad (1.80)$$

De asemenea, din cauza distributivității produselor cu vectori, vom avea

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\bar{a}) &= m\dot{\bar{a}} + \dot{m}\bar{a} \\ \frac{d}{dt}(\bar{a}\bar{b}) &= \dot{\bar{a}}\bar{b} + \bar{a}\dot{\bar{b}} \\ \frac{d}{dt}(\bar{a} \times \bar{b}) &= \dot{\bar{a}} \times \bar{b} + \bar{a} \times \dot{\bar{b}} \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

Prin urmare, regulile de derivare pentru sumă și produs din analiza scalară se mențin și în analiza vectorială pentru sumă și pentru cele trei feluri de produse.

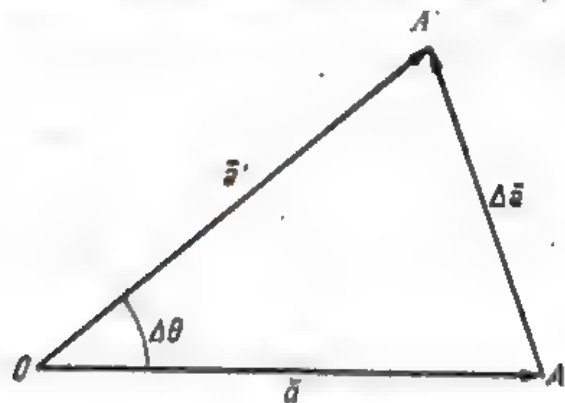


Fig. 1.23

§ 28. **Derivata unui vector de modul constant.** Ne propunem a deduce expresia derivatei unui vector de modul constant.

Să presupunem că vectorul $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$ (fig. 1.23) rămîne constant în modul. Rezultă că dacă O este fix, locul geometric (A) al vîrfului A al vectorului se va găsi pe sfera cu centrul în O și cu raza OA . Așadar, $\dot{\bar{a}}$ care este dirijat pe tangenta la (A), în A , va fi perpendicular pe \bar{a} , ceea ce se vede și din relația

$$\bar{a}\dot{\bar{a}} = \text{const.}$$

derivată în raport cu timpul

$$\bar{a}\dot{\bar{a}} = 0.$$

Fie $\overline{OA'} (= \vec{a}')$ o poziție a vectorului vecină cu OA (fig. 1.23) și fie $\Delta\theta$ unghiul $(\overline{OA}, \overline{OA'})$ dintre cele două poziții vecine. Vom avea

$$\vec{a}' - \vec{a} = \Delta\vec{a}, \quad |\Delta\vec{a}| = \vec{a}\Delta\theta,$$

dacă unghiul $\Delta\theta$ este foarte mic; am notat cu a valoarea absolută $|\vec{a}|$ a vectorului \vec{a} . Deducem

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}\Delta\theta}{\Delta t} \vec{\varepsilon} = \frac{a d\theta}{dt} \vec{\varepsilon},$$

însemnând cu $\vec{\varepsilon}$ versorul vectorului $\overline{AA'}$ la limită.

Vom putea scrie, deci

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}} = \dot{\theta} \vec{\varepsilon} \quad (1.82)$$

unde $\dot{\theta}$ înseamnă derivata în raport cu timpul a unghiului θ format de vectorul \vec{a} cu o dreaptă fixă din plan. Deducem că *derivata unui vector \vec{a} , constant în modul, este un vector normal pe \vec{a} având valoarea scalară egală cu modulul a multiplicat cu $\dot{\theta}$.*

Însemnând cu $\vec{\rho}$ versorul lui \vec{a} , vom avea

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}} = a\dot{\vec{\rho}} \quad (1.83)$$

și deci, în virtutea relației (1.82),

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\theta} \vec{\varepsilon}, \quad (1.84)$$

formulă care dă derivata unui versor și care de altfel poate fi privită ca un caz particular al formulei (1.82).

A p l i c a Ț i i. 9°. Se consideră în planul xOy vectorul de poziție $\overline{OM} = \vec{r} = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \vec{i} + (A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t) \vec{j}$, (A, B, A_1, B_1, ω , sînt constante, iar t este timpul).

Se cere viteza \vec{v} , accelerația \vec{a} și traiectoria mobilului M .

Viteza \vec{v} a lui M este

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \omega (A \cos \omega t - B \sin \omega t) \vec{i} + \omega (A_1 \cos \omega t - B_1 \sin \omega t) \vec{j},$$

iar accelerația \vec{a} este

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \vec{i} - \omega^2 (A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t) \vec{j}.$$

Rezultă:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}.$$

Deci direcția accelerației trece neconținut prin originea O , iar mărimea ei este proporțională cu distanța OM .

Traiectoria se obține eliminând timpul între coordonatele x și y ale punctului M

$$\left(\frac{A_1 x - A y}{A_1 B - A B_1} \right)^2 + \left(\frac{B_1 x - B y}{A_1 B - A B_1} \right)^2 = 1,$$

adică o elipsă cu centrul în O .

10°. Se dau vectorii

$$\vec{v}_1 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{v}_2 = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k},$$

în care x, y, z sînt funcții de timp. Să se verifice relațiile

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_2 = \frac{d(xyz)}{dt}, \quad \vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 2 \frac{d(xyz)}{dt}, \quad \frac{d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{dt} = 3 \frac{d(xyz)}{dt}.$$

În adevăr,

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot \vec{v}_2 = yz \frac{dx}{dt} + zx \frac{dy}{dt} + xy \frac{dz}{dt} = \frac{d(xyz)}{dt} \text{ etc.}$$

Se observă că ultima relație cerută se poate obține prin adunarea primelor două.

§ 29. **Formulele lui Frenet.** Fie (Γ) (fig. 1.24) o curbă ale cărei puncte P sînt determinate de lungimea arcului corespunzător s socotit de la o origine P_0 . Vom numi *unghi de contingență* unghiul $\epsilon \neq 0$ format de versorii $\vec{\tau}$ și $\vec{\tau}_1 (= \vec{\tau}_2)$ în două puncte P, P_1 vecine (arc $PP_1 = \Delta s$). Limita C a raportului $\frac{\epsilon}{\Delta s}$ cînd Δs tinde către zero,

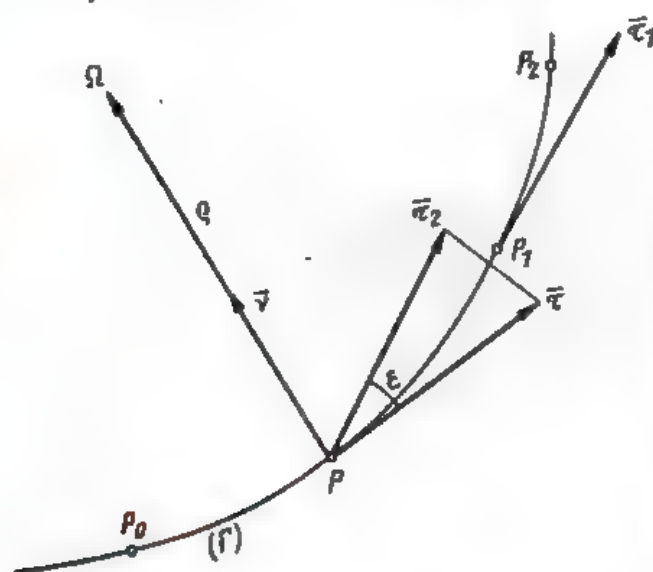


Fig. 1.24

$$C = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\Delta s},$$

se numește *curbura curbei* (Γ) în punctul P . O vom presupune totdeauna pozitivă, adică vom presupune că traiectoria nu este rectilinie, ci o curbă avînd un număr finit de puncte de inflexiune (pe care le vom excepta) și că arcele s cresc în sensul indicat de $\vec{\tau}$.

Inversul ρ al mărimii C se numește *raza de curbura* a curbei (Γ) în punctul P .

$$\rho = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\epsilon}.$$

Planul determinat de versorul $\vec{\tau}$ (în P) și de versorul $\vec{\tau}_2$ paralel prin P la $\vec{\tau}_1$ din P_1 tinde către *planul osculator al curbei în P* cînd Δs tinde către zero. Este evident că tot către acest plan tinde și planul ce trece prin $\vec{\tau}$ și P_1 , sau, în fine, planul ce trece prin trei puncte P, P_1, P_2 vecine pe curbă, cînd punctele tind să se confunde. În cazul cînd curba (Γ) este plană, planul osculator este chiar planul curbei.

Variația vectorului $\bar{\tau}$ când se trece din P în P_1 este vectorul care unește capetele vectorilor $\bar{\tau}$ și $\bar{\tau}_2$, adică un vector așezat în planul $(\bar{\tau}, \bar{\tau}_2)$, avînd valoarea absolută ε . La limită, pentru $\Delta s \rightarrow 0$, vom avea

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{v} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta s} = C\bar{v}, \quad (1.85)$$

unde am însemnat cu \bar{v} versorul normalei pe $\bar{\tau}$ așezat în planul osculator al curbei și dirijat înspre concavitatea ei. Axa care trece prin P și care are versorul \bar{v} se numește *normala principală a curbei* în punctul P . Relația (1.85), care se mai poate scrie și

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{v}, \quad (1.86)$$

este prima formulă a lui *Frenet*. Punctul Ω situat pe normala principală, în sensul lui \bar{v} , la distanța ρ de P se numește *centru de curbura*.

Fie $\bar{\beta}$ versorul normal pe planul osculator în P , așa fel ca triedrul $(\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\beta})$ să fie drept. Vom avea

$$\bar{\beta} \bar{\tau} = 0$$

și deci, prin derivare în raport cu s ,

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{\beta}}{ds} + \bar{\beta} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0.$$

Să înlocuim aici pe $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ prin valoarea sa din (1.85). Vom obține

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{\beta}}{ds} + C\bar{\beta} \bar{v} = 0$$

sau, ținînd seama că $\bar{\beta} \bar{v}$ este nul,

$$\bar{\tau} \frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0. \quad (1.87)$$

Pe de altă parte, din relația $\bar{\beta} \bar{\beta} = 1$, deducem, prin derivare în raport cu s ,

$$\bar{\beta} \frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0. \quad (1.88)$$

Vectorul $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ este deci normal versorilor $\bar{\tau}$ și $\bar{\beta}$, potrivit relațiilor (1.87) și (1.88); el trebuie, deci, să aibă direcția lui \bar{v} , adică

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -T\bar{v}, \quad (1.89)$$

unde T este un scalar. Semnul lui T este astfel luat, încît T să fie pozitiv pentru o rotație pozitivă a triedrului natural în jurul lui $\bar{\tau}$.

Pentru curbe plane ($d\bar{\beta}=0$) el va fi nul. Făcînd abstracție de acest caz particular, vom presupune că T este un număr pozitiv sau negativ ($\neq 0$) care se cheamă *torsiunea curbei*. Inversul torsiunii,

$$\rho_1 = \frac{1}{T},$$

se numește *raza de torsiune a curbei*. Formula (1.89) este a doua formulă a lui *Frenet*.

A treia formulă se deduce din relația

$$\bar{v} = -\bar{\tau} \times \bar{\beta},$$

prin derivare în raport cu s ,

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = -\frac{d\bar{\tau}}{ds} \times \bar{\beta} - \bar{\tau} \times \frac{d\bar{\beta}}{ds}.$$

Folosind relațiile (1.85) și (1.89), egalitatea precedentă devine

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = -C\bar{\tau} + T\bar{\beta}, \quad (1.90)$$

care este a treia formulă a lui *Frenet*. Scrise laolaltă, ele prezintă o simetrie evidentă

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= C\bar{v}, & C &= 1/\rho, \\ \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= -T\bar{v}, & T &= 1/\rho_1, \\ \frac{d\bar{v}}{ds} &= -C\bar{\tau} + T\bar{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

Axele determinate în punctul P de versorii $\bar{\tau}$, \bar{v} , $\bar{\beta}$ formează un triedru ortogonal — *triedrul axelor intrinseci ale curbei* (Γ) numit și *reper natural*. El este un *triedru variabil* de la punct la punct pe curba (Γ), adică un *reper mobil*.

§ 30. Expresiile scalarilor C și T . Din relația (1.85) se deduce

$$C\bar{v} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}.$$

Însă $\bar{\tau} \left(= \frac{d\bar{r}}{ds} = \dot{\bar{r}} \right)$ are proiecțiile x' , y' , z' pe axele de coordonate, notînd prin accente derivatele în raport cu s . Vom avea, deci,

$$C = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}. \quad (1.92)$$

Scalarul T se poate scoate din relația (1.90) multiplicînd-o scalar cu $\bar{\beta}$. Vom obține, astfel

$$T = \bar{\beta} \frac{d\bar{v}}{ds}.$$

sau, cu (1.86),

$$T = \bar{\beta}(\rho \bar{\tau}'' + \rho' \bar{\tau}'), \quad \rho = 1/C.$$

Înlocuind pe $\bar{\beta}$ prin $\bar{\tau} \wedge \bar{v}$, vom avea

$$T = \rho \left(\bar{\tau}, \bar{v}, \frac{d^2 \bar{\tau}}{ds^2} \right) + \rho' \left(\bar{\tau}, \bar{v}, \frac{d \bar{\tau}}{ds} \right).$$

Dar vectorii \bar{v} și $\bar{\tau}'$ au aceeași direcție în virtutea relației (1.86) și deci produsul mixt $(\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\tau}')$ va fi nul. Rezultă

$$T = \rho(\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\tau}'')$$

sau, cu (1.86) și cu $\bar{\tau} = \bar{r}'$,

$$T = \rho^2(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''). \quad (1.93)$$

§ 31. Diferențiale. Cantitatea simbolică

$$d\bar{a} = \frac{d\bar{a}}{dt} dt = \dot{\bar{a}} dt \quad (1.94)$$

se numește *diferențiala vectorului \bar{a}* . Din regulile de derivare date la § 26 se deduc imediat regulile de diferențiere.

Ca aplicație vom stabili o formulă utilă. Produsul scalar $\bar{a} d\bar{b}$ se poate scrie

$$\bar{a} d\bar{b} = \bar{a} \text{ vers } \bar{a} d(b \text{ vers } \bar{b}),$$

sau încă

$$\bar{a} d\bar{b} = \bar{a} db \text{ vers } \bar{a} \text{ vers } \bar{b} + \bar{a} \bar{b} \text{ vers } \bar{a} d(\text{vers } \bar{b}).$$

Dacă cei doi vectori \bar{a} și \bar{b} au aceeași direcție, ultimul termen din dreapta va fi nul, așa încât vom obține

$$\bar{a} d\bar{b} = \pm a db. \quad (1.95)$$

Vom lua în dreapta semnul $+$ sau $-$ după cum vectorii \bar{a} și \bar{b} au sau nu același sens.

§ 32. Integrale. Analog integralelor din Analiza cantităților scalare, se pot introduce integrale și în calculul vectorial.

Fie \bar{a} un vector, funcție dată de parametrul t în intervalul închis (t_0, t) . Divizăm intervalul de la t_0 la t în n intervale parțiale (t_{i-1}, t_i) , ($i=1, 2, \dots, \dots, n, t_n=t$) și facem suma

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i (t_i - t_{i-1}),$$

presupunând că \bar{a}_i este valoarea medie a vectorului \bar{a} în intervalul (t_{i-1}, t_i) . Această sumă poate tinde către o limită când n tinde către infinit, astfel

ca fiecare dintre cele n intervale să tindă către zero, oricare ar fi modul de diviziune a intervalului (t_0, t) . Când limita există, ea se înseamnă cu

$$\int_{t_0}^t \bar{a} dt$$

și se citește *integrala din $\bar{a} dt$ de la t_0 la t* .

Integrala aceasta este, evident, un vector. Să-l notăm cu \bar{A} .

Dacă dăm, acum, limitei superioare t o creștere dt și socotim creșterea lui \bar{A} corespunzătoare acestei creșteri dt , obținem

$$d\bar{A} = \bar{a} dt,$$

de unde deducem că integrarea și diferențierea sînt două operații inverse una alteia. Regăsim astfel regula de integrare din analiza scalară.

Este evident că proiecțiile vectorului \bar{A} pe cele trei axe de coordonate sînt respectiv

$$\int_{t_0}^t a_x dt, \quad \int_{t_0}^t a_y dt, \quad \int_{t_0}^t a_z dt,$$

dacă însemnăm cu a_x, a_y, a_z proiecțiile vectorului \bar{a} pe axe. Deci vom putea scrie

$$\bar{A} = \bar{i} \int_{t_0}^t a_x dt + \bar{j} \int_{t_0}^t a_y dt + \bar{k} \int_{t_0}^t a_z dt.$$

§ 33. **Lucrul mecanic.** O altă formă de integrală ce se întâlnește adesea este dată de noțiunea de *lucru mecanic*.

Pentru a introduce noțiunea foarte importantă de lucru mecanic, vom considera drumul rectiliniu PP' (fig. 1.25, a) descris de mobil în sensul de la P la P' , și-i vom asocia un vector constant \bar{F} , de exemplu o forță. Vom numi *lucru mecanic al vectorului \bar{F} pe drumul PP'* produsul scalar dintre vectorii \bar{F} și PP' ,

$$L_{PP'} = \bar{F} \cdot \overline{PP'}.$$

În cazul general cînd mobilul descrie un arc de curbă AB (fig. 1.25, b) căreia îi este asociat în fiecare punct al ei un vector (constant sau variabil) \bar{F} , vom înscrie în arcul AB de curbă o linie poligonală $AA_1A_2 \dots A_nB$ și vom face suma produselor scalare

$$\bar{F}_i \overline{A_i A_{i+1}}, \quad (A_i \equiv A, A_{n+1} \equiv B),$$

însemnînd cu \bar{F}_i valoarea forței în punctul A_i . Făcînd acum pe n să tindă către infinit și în același timp fiecare latură $A_i A_{i+1}$ către zero, suma poate tinde către o limită. Această limită, cînd există, se numește *lucrul mecanic al vectorului \bar{F} pe drumul AB* și se înseamnă

$$L_{AB} = \int_{(AB)} \bar{F} d\vec{r}. \quad (1.96)$$

Expresia din dreapta este o integrală *curbilinee* de-a lungul liniei AB . Elementul de integrare $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ se numește *lucrul mecanic elementar al vectorului \vec{F}* și se notează

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.97)$$

Dacă F_x, F_y, F_z sînt proiecțiile vectorului \vec{F} , iar dx, dy, dz ale vectorului $d\vec{r}$ pe cele trei axe de coordonate, lucrul mecanic elementar se mai poate scrie

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.98)$$

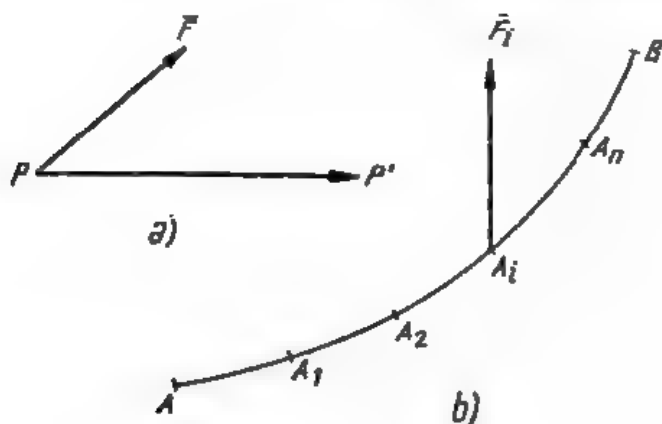


Fig. 1.25

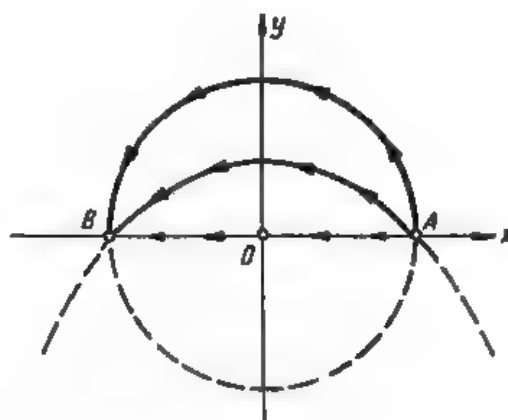


Fig. 1.26

El este o mărime scalară, așadar un invariant al grupului de transformări ale axelor de coordonate.

Ținînd seama de relația

$$d\vec{r} = \vec{v} dt,$$

unde \vec{v} este viteza mobilului pe traiectorie, expresia lucrului mecanic devine

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v} dt. \quad (1.99)$$

În cazul cînd vectorul \vec{F} este suma mai multor vectori $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, putem enunța următoarea proprietate:

Lucrul mecanic al sumei a n vectori este egal cu suma lucrurilor mecanice ale componentelor pe drumul considerat. Justificarea ei apare evidentă dacă ținem seama de proprietatea de distributivitate a produsului scalar.

De cele mai multe ori vectorii \vec{F}_i sînt forțe. Vom da mai departe (§ 36) exemple de lucru mecanic de forțe.

Aplicație. 11°. Să se calculeze lucrul mecanic al forței plane

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$$

(axe de coordonate fiind ortogonale), cînd punctul său de aplicație se deplasează:

- pe axa Ox de la $A(x=+1)$ pînă la $B(x=-1)$;
- pe semicercul $x^2 + y^2 = 1$ între aceleași puncte;
- pe parabola $x^2 = 1 - 2y$ între aceleași puncte și să se explice rezultatul.

Se utilizează formula (1.96).

În cazul dreptei AB :

$$\bar{F} = x^2 \bar{i}, \quad d\bar{r} = dx \bar{i},$$

$$L_{AB} = \int_{+1}^{-1} \bar{F} d\bar{r} = \int_{+1}^{-1} x^2 dx = -\frac{2}{3}.$$

În cazul semicercului:

$$\bar{F} = (x^2 + y^2) \bar{i} + 2xy \bar{j}, \quad d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x dx + y dy = 0,$$

$$L_{AB} = \int_{+1}^{-1} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy = \int_{+1}^{-1} dx + \int_{+1}^{-1} -2x^2 dx = -\frac{2}{3}.$$

În cazul parabolei:

$$\bar{F} = (x^2 + y^2) \bar{i} + 2xy \bar{j}, \quad d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j},$$

$$x^2 = 1 - 2y, \text{ de unde } y = \frac{1-x^2}{2}, \quad x dx = -dy,$$

$$L_{AB} = \int_{+1}^{-1} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy = \int_{+1}^{-1} \left[x^2 + \left(\frac{1-x^2}{2} \right)^2 \right] dx - 2x^2 \left(\frac{1-x^2}{2} \right) dx = -\frac{2}{3}.$$

Rezultatul se explică prin faptul că expresia (1.98)

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$$

este diferențiala exactă a funcției

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2$$

și deci

$$L_{AB} = U(-1, 0) - U(+1, 0) = -\frac{2}{3}.$$

§ 34. Cîmp de vectori. Dacă un vector poate fi determinat pentru orice punct din spațiu ca funcție de poziția punctului, totalitatea valorilor pe care le ia vectorul în tot spațiul constituie *cîmpul vectorului*. De pildă, vectorul de poziție \bar{r} , care unește originea O cu un punct A din spațiu, are un cîmp ușor de determinat. Cele trei proiecții ale lui \bar{r} pe axele de coordonate sînt coordonatele x, y, z ale punctului A .

Forțele din Mecanică ne dau prilejul definiției unor atare cîmpuri de vectori, adică a *cîmpurilor de forțe*. De exemplu *greutatea corpurilor* care, după cum se știe, este dirijată pe verticală în jos, va avea într-un spațiu finit, redus, cîmpul — pentru un corp de greutate G — format de un vector G constant în mărime, direcție și sens pentru tot spațiul. El este un cîmp constant sau un cîmp uniform.

Alt exemplu ni-l oferă *atracția proporțională cu distanța* pe care ar exercita-o originea O a axelor de coordonate asupra unui punct material

de vector de poziție $\vec{r}(x, y, z)$, adică o *forță elastică*, întrebuintând un nume consacrat în Mecanică. Câmpul de vectori corespunzători va fi reprezentat prin funcția vectorială

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

unde k este o constantă scalară pozitivă. Proiecțiile câmpului pe cele trei axe de coordonate sînt respectiv

$$-kx, \quad -ky, \quad -kz.$$

Dacă în originea O a axelor de coordonate ar fi plasat un punct de masă M acesta ar exercita o *atracție newtoniană* \vec{F} asupra punctului material P de masă m , situat la distanța r de O ($OP=r$), forța \vec{F} avînd expresia

$$\vec{F} = -f \frac{Mm}{r^2} \vec{\rho}, \quad \vec{\rho} = \text{vers } \vec{r} = \text{vers } \overrightarrow{OP},$$

unde am însemnat cu f o constantă pozitivă. Câmpul acestui vector \vec{F} are proiecțiile

$$-f \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad -f \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad -f \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{z}{r},$$

respectiv pe axele de coordonate Ox , Oy , Oz .

În *electrodinamică*, vectorul cîmp electric \vec{E} și vectorul cîmp magnetic \vec{H} dau naștere în mod analog cîmpului *electromagnetic* care joacă un rol fundamental în *teoria electricității*.

Linii de vectori. Linii de forță. Curbele care au tangentele dirijate după vectorii cîmpului formează o *congruență*; ele poartă numele de *linii de vectori*.

Determinarea lor analitică se obține prin rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Dacă v_x, v_y, v_z reprezintă proiecțiile vectorului \vec{v} pe axe, atunci *liniile* corespunzătoare cîmpului \vec{v} vor fi date de ecuațiile

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (1.10)$$

unde v_x, v_y, v_z trebuie date ca funcții de x, y, z .

În cazul cînd vectorul \vec{v} este o forță \vec{F} , liniile respective se numesc *linii de forță*.

Exemple. Forța gravitației raportată la un sistem de axe avînd pe Oz dirijat vertical în sus, $\vec{G}(0, 0, -G)$, ne va da liniile de forță satisfăcînd sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-G},$$

adică congruența de drepte

$$x = c_1, \quad y = c_2,$$

c_1, c_2 fiind constante arbitrare. Deci liniile de forță vor fi formate de congruența dreptelor verticale.

Liniile corespunzătoare forței elastice vor satisface sistemul

$$\frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{-ky} = \frac{dz}{-kz},$$

adică vor fi date de ecuațiile

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x,$$

c_1, c_2 fiind constante arbitrare.

Deci liniile de forță, în acest caz, vor fi formate de congruența de raze pornind din origine.

Forța gravitației universale, avînd punctul atractiv în origine, conduce la aceleași linii de forță ca și în cazul forței elastice.

Liniile de forță joacă un rol important în Fizică și în Electricitate.

A p l i c a Ț i i. 12°. Se dă în planul xOy câmpul de forțe

$$\vec{F} = \frac{1}{y} \left(ax + \frac{b}{y} \right) \vec{i} + \frac{1}{x} \left(ay + \frac{b}{x} \right) \vec{j}.$$

Să se găsească linia de forță care trece prin punctul $M(x_0, y_0)$. Ecuația diferențială a liniei de forță este

$$\frac{dx}{\frac{1}{y} \left(ax + \frac{b}{y} \right)} = \frac{dy}{\frac{1}{x} \left(ay + \frac{b}{x} \right)},$$

de unde se obține linia de forță căutată

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}.$$

Expresia $axy + b$ cu care s-a simplificat ecuația diferențială, egalată cu zero, reprezintă locul geometric al punctelor în care forța este nulă.

13°. Se consideră câmpul de forțe

$$\vec{F} = -\frac{\lambda y}{x^{\lambda+1}} \vec{i} + \frac{1}{x^{\lambda}} \vec{j}.$$

Să se determine λ astfel, încît liniile de forță să fie:

- a) cercuri,
- b) elipse,
- c) hiperbole.

Liniile de forță sînt date de

$$\frac{dx}{-\frac{\lambda y}{x^{\lambda+1}}} = \frac{dy}{\frac{1}{x^{\lambda}}},$$

de unde

$$x^2 + \lambda y^2 = c^2.$$

Pentru $\lambda=1$, liniile de forță sînt cercuri, pentru $\lambda>0$ sînt elipse, pentru $\lambda<0$ sînt hiperbole.

§ 35. Gradient. Nabla. Funcție de forță. Potențial. Se poate obține un câmp de vectori în mod foarte simplu în felul următor.

Fie $U(x, y, z)$ o funcție scalară, uniformă și derivabilă de coordonatele x, y, z într-un anumit domeniu D (o porțiune a spațiului). Derivatele parțiale ale lui U în raport cu x, y, z sînt în fiecare punct trei mărimi care satisfac formulele (1.10) de transformare în cazul unei schimbări de axe, adică $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ se comportă ca proiecțiile unui vector la o schimbare de axe de coordonate. Această proprietate se verifică imediat dacă ținem seamă de formulele (1.8) de trecere de la coordonatele x, y, z la coordonatele x', y', z' . Rezultă de aici că derivatele $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ pot fi considerate ca definind un vector cu aceste proiecții pe axele de coordonate. Acest vector se numește gradient al funcției U . Scriem

$$\vec{F} = \text{grad } U \quad (1.101)$$

sau

$$\vec{F} = \nabla U, \quad (1.102)$$

unde am pus

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.103)$$

Semnul ∇ se citește „nabla”. El este un operator vectorial care transformă un scalar într-un vector; se mai numește și operatorul lui Hamilton.

Gradientul joacă un rol important, mai ales în reprezentarea anumitor forțe, $\vec{F} = \text{grad } U$. În acel caz U se numește funcție de forță.

Funcția $-U$ pe care o vom însemna cu V ,

$$-U = V, \quad (1.104)$$

se numește *energie potențială* sau simplu *potențial* (această din urmă numire, întrebuițată des în electricitate, fiind rezervată mai ales cazului în care masa punctului material este egală cu unitatea). Vom avea, deci,

$$\vec{F} = -\text{grad } V. \quad (1.105)$$

Nu orice forță se poate pune sub formă de gradient. Forțele care admit o astfel de reprezentare se numesc *forțe conservative*, iar celelalte se numesc *forțe neconservative*. Se obișnuiește a se spune că forțele conservative admit o funcție de forță sau că ele derivă dintr-un potențial.

Este ușor de verificat că suma a două forțe conservative este tot o forță conservativă. Dacă U_1 și U_2 sînt funcțiile de forță ale celor două componente, atunci $U_1 + U_2$ este funcția de forță a rezultantei. Aceasta revine la a spune că operatorul ∇ este distributiv

$$\nabla(U_1 + U_2) = \nabla U_1 + \nabla U_2.$$

Să considerăm de pildă greutatea \vec{G} raportată la un sistem de axe avînd pe Oz dirijat vertical în sus. Proiecțiile forței \vec{G} , pe cele trei axe de coordonate, vor fi

$$0, \quad 0, \quad -G.$$

Evident că putem lua pe $-Gz$ drept funcție de forță corespunzătoare, încît vom avea

$$\vec{G} = \nabla(-Gz) = -\nabla Gz = -G\vec{k}.$$

Alt exemplu ni-l oferă forța elastică

$$\vec{F} = -k\vec{r}.$$

Proiecțiile ei fiind

$$-kx, \quad -ky, \quad -kz,$$

funcția de forță va fi, evident,

$$-k \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = -\frac{k r^2}{2},$$

încît vom avea

$$\vec{F} = -\nabla \frac{k r^2}{2}.$$

Pentru forța de atracție newtoniană considerată la § 34 vom avea funcția de forță corespunzătoare

$$U = f \frac{Mm}{r}, \text{ deci } \vec{F} = \text{grad} \left(f \frac{Mm}{r} \right).$$

Funcția U se poate determina (cînd este posibil) cu aproximația unei constante aditive care, se înțelege, nu influențează valoarea componentelor forței. Bunăoară, în exemplele date, putem lua $-Gz + C$, respectiv $-\frac{k r^2}{2} + C$, drept funcții de forță, C fiind o constantă arbitrară.

Însă trebuie să menționăm încă o dată că numai în mod excepțional poate fi reprezentată o forță \vec{F} prin gradientul unei funcții scalare de x, y, z . Cu alte cuvinte, pentru ca o forță să fie conservativă, proiecțiile ei pe axe trebuie să îndeplinească anumite condiții care, după cum se știe din Analiză, sînt

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}. \quad (1.106)$$

Ele sînt suficiente pentru a putea determina pe U . Funcția U se va obține integrînd ecuația diferențială

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Aplicații. 14. Să se determine gradientii funcțiilor:

$$U_1 = x(x-a) + y(y-b) + z(z-c),$$

$$U_2 = -\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2},$$

$$U_3 = \ln(xyz).$$

Se aplică funcțiilor operatorul ∇ și se obține

$$\nabla U_1 = (2x-a)\bar{i} + (2y-b)\bar{j} + (2z-c)\bar{k},$$

$$\nabla U_2 = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \left(\frac{x}{y^2+z^2}\bar{i} + \frac{y}{x^2+z^2}\bar{j} + \frac{z}{x^2+y^2}\bar{k} \right) + \frac{x}{y^2+z^2} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\bar{j} + \frac{1}{x^2+z^2}\bar{k} \right) + \frac{y}{x^2+y^2} \left(\frac{1}{x^2+z^2}\bar{i} + \frac{1}{x^2+y^2}\bar{k} \right) + \frac{z}{x^2+y^2} \left(\frac{1}{x^2+z^2}\bar{i} + \frac{1}{x^2+y^2}\bar{j} \right),$$

$$\nabla U_3 = \frac{x}{1} \bar{i} + \frac{y}{1} \bar{j} + \frac{z}{1} \bar{k}.$$

15. Să se calculeze potențialul câmpului de vectori

$$\vec{v} = \frac{x}{y^2+z^2} \bar{i} + (2y \ln x) \bar{j} + (2z \ln x) \bar{k}.$$

Notind cu V potențialul, avem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{y^2+z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -2y \ln x, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -2z \ln x.$$

Rezultă

$$V = -(y^2+z^2) \ln x.$$

§ 36. Suprafețe echipotențiale. Să considerăm două puncte în spațiu P și P' vecine, având coordonatele x, y, z , respectiv $x+dx, y+dy, z+dz$. Valorile pe care le ia U în aceste două puncte sînt $U(x, y, z)$, respectiv $U(x+dx, y+dy, z+dz)$. Între ele există relația dată de o cunoscută dezvoltare în serie pe care o vom limita la termenii de ordinul întâi

$$U(x+dx, y+dy, z+dz) = U(x, y, z) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

adică

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

notind cu dU variația funcției U corespunzătoare deplasării din P în P' . Să însumăm vectorul $\overrightarrow{PP'}$ cu $d\vec{r}$. Vom putea scrie

$$dU = \text{grad } U \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r dr,$$

dacă notăm cu \vec{F} forța egală cu grad U , F_r fiind proiecția vectorului \vec{F} pe direcția și sensul vectorului $\overrightarrow{PP'}$, iar dr , lungimea $\overrightarrow{PP'}$. Relația precedentă ne dă

$$dU = F_r dr.$$

(1.107)

Mărimea $\frac{dU}{dr}$ se numește derivata funcției U în sensul $d\vec{r}$ ($=\overline{PP'}$), încît relația precedentă se poate exprima în felul următor: *derivata lui U în sensul $d\vec{r}$ este egală cu proiecția forței pe direcție*. Această proprietate a funcției de forță este o generalizare a relațiilor de definiție a vectorului grad U ,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z.$$

Ea ne confirmă caracterul vectorial al mărimii ∇U .

Să considerăm acum suprafața

$$U(x, y, z) = c, \quad (1.108)$$

unde c este o constantă. Această suprafață are proprietatea evidentă că funcția de forță U ia aceeași valoare în toate punctele ei. O astfel de suprafață se numește *suprafață echipotențială sau suprafață de nivel*. Numele de „*echipotențială*” ce i se dă este în legătură cu proprietatea ei de a reprezenta locul punctelor de același potențial.

Două astfel de suprafețe care corespund la două constante diferite C_1 și C_2 nu pot avea nici un punct comun. Într-adevăr, dacă ar exista un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ comun celor două suprafețe, ar urma să avem

$$U(x_0, y_0, z_0) = C_1,$$

$$U(x_0, y_0, z_0) = C_2,$$

de unde ar rezulta

$$C_1 = C_2,$$

ceea ce contrazice ipoteza $C_1 \neq C_2$ (funcția U fiind presupusă uniformă).

În cazul *greutății \vec{G}* , suprafețele echipotențiale sînt planele horizontale, iar în cazul *forței elastice*, sau al *forței de atracție gravitaționale*, suprafețele echipotențiale sînt sferele concentrice, cu centrul în punctul atractiv O .

Să presupunem acum că deplasarea din P în P' , considerată mai înainte, se face chiar pe o suprafață echipotențială. Atunci variația dU a funcției este, evident, nulă, încît relația (1.107) devine

$$F_T = 0.$$

Cu alte cuvinte, *proiecția forței \vec{F} pe orice direcție situată pe o suprafață echipotențială este nulă*. Aceasta înseamnă că forța \vec{F} este normală la suprafața echipotențială. Așadar:

Forța \vec{F} care derivă din funcția de forță U este normală la suprafața echipotențială

$$U = C.$$

Congruența liniilor de forță este normală familiei de suprafețe echipotențiale; liniile de forță sînt, deci, *traectoriile ortogonale* ale familiei de suprafețe date de (1.108).

Forța este dirijată în sensul în care U crește și, după cum se vede din relația (1.107), este aplicată în direcția normalei ($d\vec{r} = d\vec{n}$)

$$\frac{dU}{dn} = F.$$

Dacă F este pozitiv, trebuie ca și dU să fie pozitiv, adică F indică sensul de creștere al funcției U .

A p l i c a Ț i e. 16°. Se consideră câmpul plan de vectori

$$\vec{v} = (x^3 - kxy^2)\vec{i} + (y^3 - kx^2y)\vec{j},$$

unde k este o constantă. Să se determine k astfel, încît curbele de nivel să fie:

- a) cercuri cu centrul în origine,
- b) hiperbole echilatre.

În acest caz,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = -2kxy.$$

Deci

$$dU = v_x dx + v_y dy = d\left(\frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{kx^3y^2}{2}\right),$$

$$U = \frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{kx^3y^2}{2} + \text{const.}$$

Curbele de nivel:

$$U \equiv \frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{kx^3y^2}{2} = \text{const.}$$

Pentru $k = -1$ se obțin cercurile cerute

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Pentru $k = +1$ se obțin hiperbolele cerute

$$x^2 - y^2 = \text{const.}$$

§ 37. Noțiunile vectoriale. Operatorul *nabla* are caracterul unui vector, astfel încît se pot face operații cu ∇ așa cum se face de obicei cu un vector. În special, putem face produsul scalar sau vectorial al vectorului ∇ cu un alt vector \vec{a} . Pentru produsul scalar vom obține

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

un scalar care este cunoscut în analiza vectorială sub numele de *divergență* și se înseamnă obișnuit $\text{div } \vec{a}$.

Cîteodată se întrebuițează și produsul scalar

$$\bar{a} \nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z},$$

care reprezintă un *operator diferențial scalar*.

Produsul vectorial dintre ∇ și \bar{a} ,

$$\nabla \times \bar{a} = \bar{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right),$$

reprezintă un vector cunoscut sub numele de *rotor* de \bar{a} ; notația obișnuită: $\text{rot } \bar{a}$.

Simbolul $\bar{a} \times \nabla$ reprezintă un *operator diferențial vectorial*

$$\bar{a} \times \nabla = \bar{i} \left(a_y \frac{\partial}{\partial z} - a_z \frac{\partial}{\partial y} \right) + \bar{j} \left(a_z \frac{\partial}{\partial x} - a_x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \bar{k} \left(a_x \frac{\partial}{\partial y} - a_y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

În fine, produsul scalar $\nabla \nabla = \nabla^2$ este egal cu operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

care se mai înseamnă și cu Δ și se numește *operatorul lui Laplace sau Laplaceian*.

Operatorul Δ este echivalent cu aplicarea unei divergențe la un gradient

$$\Delta U = \text{div} (\text{grad } U).$$

Aceste mărimi au o aplicație curentă mai ales în Electricitate și în Hidrodinamică.

Iată cîteva formule utile care se pot verifica ușor:

$$1^\circ. \text{div} (\text{rot } \bar{a}) = 0 \quad \text{sau} \quad \nabla (\nabla \times \bar{a}) = 0$$

$$2^\circ. \text{rot} (\text{grad } U) = 0 \quad \text{sau} \quad \nabla \times (\nabla U) = 0$$

$$3^\circ. \text{grad} (\text{div } \bar{a}) = \text{rot} (\text{rot } \bar{a}) + \nabla \bar{a} = \nabla (\nabla \bar{a})$$

$$4^\circ. \text{grad} (UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U \quad \text{sau} \quad \nabla (UV) = U (\nabla U) + V (\nabla U)$$

$$5^\circ. \text{grad} [f(U)] = f'(U) \text{grad } U$$

$$6^\circ. \nabla (\bar{a} \bar{b}) = (\bar{a} \nabla) \bar{b} + (\bar{b} \nabla) \bar{a} + \bar{a} \times (\nabla \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\nabla \times \bar{a})$$

$$7^\circ. \nabla (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} (\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} (\nabla \times \bar{b})$$

$$8^\circ. \bar{a} (\nabla \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \nabla) \bar{b}$$

$$9^\circ. \nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b} \nabla + \nabla \bar{b}) \bar{a} - (\bar{a} \nabla + \nabla \bar{a}) \bar{b} =$$

$$= b_x \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} + \bar{a} \text{div } \bar{b} - \left(a_x \frac{\partial \bar{b}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \bar{b}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \right) - \bar{b} \text{div } \bar{a}$$

$$10^\circ. \nabla (U \bar{a}) = U (\nabla \bar{a}) + \bar{a} (\nabla U)$$

$$11^\circ. \nabla \times (U \bar{a}) = U (\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} \times (\nabla U)$$

$$12^\circ. \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla (\nabla \bar{a}) - \nabla^2 \bar{a} = \text{rot} (\text{rot } \bar{a})$$

$$13^\circ. (\bar{a} \nabla) \bar{a} = \frac{1}{2} \nabla \bar{a}^2 - \bar{a} \times (\nabla \times \bar{a})$$

Aplicații. 17°. Se dau câmpurile de vectori:

$$\vec{v}_1 = (ax + b)\vec{i} + (cy + d)\vec{j} - (a + c)z\vec{k},$$

$$\vec{v}_2 = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

Să se calculeze:

$$\nabla \vec{v}_1, \nabla \vec{v}_2, \nabla \times \vec{v}_1, \nabla \times \vec{v}_2$$

(divergența și rotorul).

Prin aplicarea operatorului diferențial și vectorial, se obține

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = -(a + c),$$

$$\nabla \vec{v}_1 = a + c - (a + c) = 0,$$

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial y} = \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} = \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{v}_1 = 0.$$

Analog,

$$\nabla \vec{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \vec{v}_2 = 0.$$

18°. Să se calculeze Laplaceienii funcțiilor

$$U_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad U_2 = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Se obține

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \text{ etc.}$$

$$\Delta U_1 = 2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right).$$

Analog,

$$\Delta U_2 = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta U_3 = 0.$$

19°. Să se calculeze Laplaceianul $\Delta \vec{V}$ al vectorului

$$\vec{V} = \frac{x^2 y}{z} \vec{i} + \frac{y^2 z}{x} \vec{j} + \frac{z^2 x}{y} \vec{k}$$

și să se verifice relația

$$\Delta \vec{V} = \text{grad} (\text{div } \vec{V}) - \text{rot} (\text{rot } \vec{V}).$$

Avem

$$\Delta \vec{V} = \Delta V_x \vec{i} + \Delta V_y \vec{j} + \Delta V_z \vec{k},$$

adică

$$\Delta \vec{V} = \frac{2y}{z} \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) \vec{i} + 2 \frac{z}{x} \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \vec{j} + 2 \frac{x}{y} \left(1 + \frac{z^2}{y^2}\right) \vec{k}.$$

Pe de altă parte

$$\operatorname{div} \bar{V} = 2 \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right),$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{V} = 2 \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - \frac{yz}{z^2} \right) \bar{i} + 2 \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - \frac{zx}{x^2} \right) \bar{j} + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{xy}{y^2} \right) \bar{k},$$

$$\operatorname{rot} \bar{V} = - \left(\frac{z^2 x}{y^2} + \frac{y^2}{x} \right) \bar{i} - \left(\frac{x^2 y}{z^2} + \frac{z^2}{y} \right) \bar{j} - \left(\frac{y^2 z}{x^2} + \frac{x^2}{z} \right) \bar{k},$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \bar{V}) = 2 \left(-\frac{yz}{x^2} - \frac{x^2 y}{z^2} + \frac{z}{y} \right) \bar{i} + 2 \left(-\frac{zx}{y^2} - \frac{y^2 z}{x^2} + \frac{x}{z} \right) \bar{j} + 2 \left(-\frac{xy}{z^2} - \frac{z^2 x}{y^2} + \frac{y}{x} \right) \bar{k}.$$

Relația pentru verificare se mai poate scrie

$$\Delta \bar{V} = \nabla (\nabla \bar{V}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{V}).$$

H. NOȚIUNI DE TEORIA GEOMETRICĂ A ȘURUBURILOR

§ 38. Noțiunea de șurub. În capitolul precedent s-a tratat problema sistemelor de vectori alunecători și s-a arătat că pentru ca două asemenea sisteme să fie echivalente este necesar și suficient ca ele să aibă într-un anumit punct O același torsor, adică același vector rezultatant și același moment rezultatant. S-a arătat că, dacă reducerea se face în raport cu un punct de pe axa centrală a sistemului, atunci cei doi vectori, \bar{R} și \bar{M}_r , sînt coliniari.

Putem, pe baza acestor considerațiuni să grupăm sistemele de vectori în clase de echivalență, adică să punem împreună toate sistemele care au același torsor în punctul O (sau aceeași axă centrală și aceleași elemente \bar{R} și \bar{M}_r). Din punct de vedere al efectului pe care un sistem de forțe îl are asupra unui rigid, așa cum se va arăta în dinamică, nu este esențială structura sistemului de forțe (numărul de forțe, modulul, suporturile și sensurile lor) ci torsorul său. Astfel noțiunea de torsor devine extrem de importantă în mecanică.

În anumite probleme speciale de mecanică teoretică și aplicată, cum ar fi aceea a formulării generale a condițiilor de echilibru ale unui rigid, aceea a condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească suporturile a n forțe în echilibru, a condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească suporturile reacțiunilor unor reazeme simple pentru a imobiliza strict un rigid, problema mobilității unui lanț cinematic etc. este necesară însă o noțiune mai generală decît aceea de torsor și anume aceea de șurub (din punct de vedere geometric).

Pentru a ajunge la noțiunea de șurub, vom considera o mulțime formată din torsori, de exemplu sub forma lor minimă. Un torsor din această mulțime poate fi caracterizat, așa cum s-a arătat mai sus, prin axa sa centrală Δ , prin vectorul rezultatant \bar{R} și prin momentul rezultatant minim \bar{M}_r . În locul a doi vectori, dat fiind faptul că ei sînt coliniari, putem utiliza numai pe unul dintre ei, de exemplu vectorul rezultatant \bar{R} și raportul dintre valorile vectorilor \bar{M}_r și \bar{R} , raport ce poartă numele de parametrul șurubului și pe care-l vom nota cu s . Ca urmare un torsor poate fi reprezentat prin ansamblul (Δ, \bar{R}, s) .

Să grupăm acum în aceeași clasă toți torsorii care au aceeași axă centrală (Δ) și același pas s , vectorii \bar{R} putînd diferi de la un torsor la altul. Se ajunge astfel la noțiunea de șurub (din punct de vedere geometric). Pentru a sesiza și mai bine această noțiune să considerăm că vectorul \bar{R} ar reprezenta o viteză unghiulară, iar vectorul \bar{M}_r o viteză de translație. Acești doi vectori, împreună pot caracteriza mișcarea unui șurub obișnuit, care înaintează și se rotește în jurul aceleiași axe (Δ) .

Un anumit șurub se poate roti cu diferite viteze unghiulare. Mărimea vitezei unghiulare nu constituie deci o caracteristică a șurubului. Caracteristic este faptul că la fiecare

viteză unghiulară imprimată șurubului, acesta însoțează cu o viteză bine determinată, proporțională cu viteza unghiulară, factorul de proporționalitate fiind parametrul s .

Definiția geometrică a șurubului apare atunci în mod natural ca fiind elementul caracterizat prin ansamblul (Δ, s) format de o dreaptă Δ — axa centrală a șurubului — și un scalar s — parametrul șurubului.

Dacă $s > 0$ șurubul se zice „drept”, dacă $s < 0$ șurubul se zice „sting”, iar dacă $s = 0$ atunci șurubul degenerază într-o dreaptă. Așadar, dreptele pot fi privite din punctul de vedere al teoriei șuruburilor ca elemente geometrice particulare. Multe din proprietățile mulțimilor de șuruburi pot fi particularizate pentru mulțimile de drepte.

Din definiția dată mai sus șurubului rezultă că toți torsorii care au aceeași axă centrală și vectorii \bar{M}_r și \bar{R} în același raport s , definesc un același șurub. Altfel spus vectorii $\lambda \bar{R}$ și $\lambda \bar{M}_r$, unde λ este un parametru variabil, diferit de zero, împreună cu axa Δ definesc același șurub. Dacă în loc să folosim torsorul minim folosim torsorul într-un punct O , atunci vom putea spune că șurubul este elementul geometric comun mulțimii de torsori $(\lambda \bar{R}, \lambda \bar{M}_O)$ unde $\lambda \neq 0$ este un parametru variabil. Așadar un șurub poate fi caracterizat prin două coordonate vectoriale omogene, spre deosebire de torsor, care este caracterizat prin două coordonate vectoriale \bar{R} și \bar{M}_O bine definite. Acestor coordonate vectoriale omogene le vor corespunde șase coordonate scalare omogene.

Noțiunea geometrică de șurub poate fi definită riguros cu ajutorul calculului analitic după cum se va vedea.

Fie u, v, w proiecțiile pe axele unui triedru cartezian ale vectorului rezultat al unui sistem de vectori alunecători și l, m, n proiecțiile pe aceleași axe ale momentului rezultat. S-a arătat la § 22–23 că vectorul rezultat, vectorul moment rezultat minim (calculat în raport cu un punct de pe axa centrală) și ecuațiile axei centrale pot fi scrise cu notațiile de mai sus sub forma

$$R = \pm \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (1.109)$$

$$M_r = \pm \frac{l u + m v + n w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \quad (1.110)$$

$$\frac{l - w y + v x}{u} = \frac{m - u z + w x}{v} = \frac{n - v x + u y}{w} \quad (1.111)$$

Putem deci caracteriza un sistem de vectori alunecători fie analitic, prin cele șase componente scalare u, v, w, l, m, n ale torsorului în O , fie geometric, prin scalarii vectorilor \bar{R} și \bar{M}_r și prin axa sa centrală.

Componentele u, v, w, l, m, n poartă numele de *coordonatele plückeriene* ale sistemului de vectori.

Să presupunem acum că aceste coordonate plückeriene sînt omogene. Ele vor determina o familie de sisteme de vectori alunecători căci, notînd aceste coordonate cu $\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda l, \lambda m, \lambda n$, unde $\lambda \neq 0$ este un parametru, observăm că pentru fiecare valoare a parametrului λ corespunde un sistem de vectori alunecători (mai exact o clasă de sisteme echivalente). Să cercetăm elementul comun al acestor sisteme. Observăm că dacă în formulele (1.109), (1.110) și (1.111) înlocuim u, v, w, l, m, n cu $\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda l, \lambda m, \lambda n$ atunci ecuațiile axei centrale (1.111) rămîn neschimbate; în schimb R și M_r devin λR și λM_r . Raportul lor

$$s = \frac{M_r}{R} = \frac{l u + m v + n w}{u^2 + v^2 + w^2} \quad (1.112)$$

rămîne neschimbat. Șurubul va fi deci elementul comun familiei de sisteme de vectori alunecători, alcătuit din axa centrală Δ , căreia i se atașează o mărime scalară s definită de (1.112) și denumită *parametrul șurubului*. Cu alte cuvinte, un șurub este caracterizat analitic prin coordonatele omogene $\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda l, \lambda m, \lambda n$ și geometric prin axa centrală Δ și parametrul s .

O dreaptă, poate fi privită din punct de vedere al teoriei șuruburilor ca un șurub de parametru $s = 0$. Ținînd seama de expresia (1.112) a parametrului s rezultă că între coordonatele plückeriene ale unei drepte subsistă relația $l u + m v + n w = 0$.

§ 39. Șuruburi reciproce. La § 15 s-a arătat că produsul reciproc a doi vectori \bar{F}_1 și \bar{F}_2 poate fi scris sub forma [v. formula (1.55)]

$$(\bar{F}_1, \bar{A}_1 \bar{A}_2, \bar{F}_2) = \bar{F}_1 \cdot \bar{M}_2 + \bar{F}_2 \cdot \bar{M}_1. \quad (1.113)$$

Notând cu $u'_1, v'_1, w'_1, l'_1, m'_1, n'_1$ și cu $u'_2, v'_2, w'_2, l'_2, m'_2, n'_2$ proiecțiile pe axe ale celor doi vectori și ale momentelor lor în raport cu originea, relația (1.113) devine

$$(\bar{F}_1, \bar{A}_1 \bar{A}_2, \bar{F}_2) = u_1 l'_2 + v_1 m'_2 + w_1 n'_2 + l_1 u'_2 + m_1 v'_2 + n_1 w'_2. \quad (1.114)$$

Dacă vom considera acum în locul a doi vectori \bar{F}_1 și \bar{F}_2 două sisteme de vectori și vom nota cu $u_1, v_1, w_1, l_1, m_1, n_1$ și $u_2, v_2, w_2, l_2, m_2, n_2$ coordonatele plückeriene ale șuruburilor corespunzătoare, atunci expresia

$$P = u_1 l_2 + v_1 m_2 + w_1 n_2 + l_1 u_2 + m_1 v_2 + n_1 w_2 \quad (1.115)$$

poartă numele de *produs reciproc al celor două șuruburi*. Două șuruburi se zic reciproce, dacă produsul lor reciproc este nul, adică

$$u_1 l_2 + v_1 m_2 + w_1 n_2 + l_1 u_2 + m_1 v_2 + n_1 w_2 = 0. \quad (1.116)$$

O b s e r v a Ț i i. 1. S-a arătat la § 15 că în cazul cînd unul dintre vectorii \bar{F}_1 și \bar{F}_2 este versorul unei axe, produsul lor reciproc (1.114) este egal cu momentul celui alt vector în raport cu axa respectivă. Se poate demonstra fără dificultate că această proprietate poate fi extinsă în cazul de față, în sensul că, dacă unul din cele două sisteme de vectori se reduce la versorul unei axe, atunci produsul reciproc (1.115) este egal cu momentul resultant al celui alt sistem în raport cu axa respectivă.

2. Se poate da o interpretare produsului reciproc a două șuruburi și în cazul general. Astfel, dacă unul dintre șuruburi corespunde unui sistem de forțe, iar celălalt unui sistem de deplasări rigide elementare, se poate arăta că produsul reciproc al celor două șuruburi este egal cu lucrul mecanic elementar produs de forțele sistemului, cînd punctele de aplicație parcurg deplasările rigide.

§ 40. Mulțimi liniare de șuruburi. Un număr $p \leq 6$ de relații omogene independente

$$\left. \begin{aligned} F_1(u, v, w, l, m, n) &= 0 \\ F_2(u, v, w, l, m, n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ F_p(u, v, w, l, m, n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

definesc o mulțime de șuruburi.

În mecanica teoretică prezintă un deosebit interes mulțimile definite prin relații liniare și omogene de forma

$$\left. \begin{aligned} L_1 u + M_1 v + N_1 w + U_1 l + V_1 m + W_1 n &= 0 \\ L_2 u + M_2 v + N_2 w + U_2 l + V_2 m + W_2 n &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ L_p u + M_p v + N_p w + U_p l + V_p m + W_p n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

Aceste relații permit ca un număr p de coordonate omogene să fie exprimate în funcție de celelalte $6-p=r$ sau ca toate coordonatele omogene să fie exprimate în funcție de r parametri variabili $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sub forma

$$\left. \begin{aligned} u &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r \\ v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r \\ w &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_r w_r \\ l &= \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_r l_r \\ m &= \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_r m_r \\ n &= \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_r n_r \end{aligned} \right\} \quad (1.119)$$

Vom numi r rangul unei mulțimi liniare de șuruburi. În aplicațiile practice intervine adesea o mulțime formată dintr-un număr finit de șuruburi, cărora trebuie să i se determine rangul r . Pentru aceasta vom forma cu coordonatele omogene $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ale acestor șuruburi matricea

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & w_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ u_n & v_n & w_n & l_n & m_n & n_n \end{array} \quad (1.120)$$

Este ușor de verificat că rangul r căutat este egal cu rangul matricei (1.120). Pentru aceasta se ține seama de relațiile (1.119) și se observă apoi că oricare ar fi numărul $n \geq r$ al șuruburilor mulțimii, rangul maxim al determinanților diferiți de zero, ce se pot forma cu elementele matricei, este r .

§ 41. Interpretări geometrice. Configurația axelor centrale ale șuruburilor unei mulțimi liniare este în strinsă legătură cu rangul acestei mulțimi. Pentru a demonstra această teoremă vom pune în evidență coordonatele omogene ale axei centrale a unui șurub aparținând unei asemenea mulțimi.

Intr-adevăr, axa centrală, fiind o dreaptă, poate fi considerată ca un şurub de parametru $s=0$. Fie u, v, w, l, m, n coordonatele omogene ale unui şurub şi u', v', w', l', m', n' coordonatele omogene ale axei sale centrale. Avem relaţiile:

$$\left. \begin{aligned} \lambda u = u', \quad \lambda v = v', \quad \lambda w = w' \\ \lambda l = l' + su', \quad \lambda m = m' + sv', \quad \lambda n = n' + sw'. \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

Într-adevăr, axa centrală, ca şurub, poate fi privită ca avînd o amplitudine (rezultantă) paralelă cu aceea a şurubului considerat şi un moment minim nul. De aceea primele trei coordonate omogene referitoare la amplitudine sînt proporţionale. Ultimele trei coordonate omogene, referitoare la momentul minim, diferă prin su , sv , sw care reprezintă proiecţiile pe axe ale momentului minim.

Să considerăm acum o mulțime liniară de șuruburi definită prin relațiile (1.118). Să înlocuim u, v, w, l, m, n prin expresiile (1.121). După simplificare cu λ , obținem

$$\left. \begin{aligned} L_1 u' + M_1 v' + N_1 w' + U_1 l' + V_1 m' + W_1 n' + s(U_1 u' + V_1 v' + W_1 w') &= 0 \\ L_2 u' + M_2 v' + N_2 w' + U_2 l' + V_2 m' + W_2 n' + s(U_2 u' + V_2 v' + W_2 w') &= 0 \\ . &. \\ L_p u' + M_p v' + N_p w' + U_p l' + V_p m' + W_p n' + s(U_p u' + V_p v' + W_p w') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.122)$$

Eliminând parametrul ϵ între ecuațiile (1.122), obținem

$$\Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1 = 0, \quad \Phi_1 \Psi_3 - \Phi_3 \Psi_1 = 0, \quad \dots, \quad \Phi_1 \Psi_p - \Phi_p \Psi_1 = 0 \quad (1.123)$$

unde am notat prin Φ_i și Ψ_i formele linare

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= L_i u' + M_i v' + N_i w' + U_i d' + V_i m' + W_i n' \\ \Psi_i &= U_i u' + V_i v' + W_i w' \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

Analizând ecuațiile (1.123) constatăm că ele reprezintă forme pătratice în u', v', w', l', m', n' . Dacă se consideră un punct în spațiul A_0 de coordonate date x_0, y_0, z_0 și un punct curent A de coordonate x, y, z pe o dreaptă trecând prin A_0 și aparținând mulțimii de drepte definită de una din formele pătratice (1.123) se verifică ușor că ea generează un con de gradul al doilea. Într-adevăr, coordonatele omogene se pot exprima în funcție de coordonatele carteziene prin formulele ¹:

$$\left. \begin{aligned} \lambda u' &= u - u_0, & \lambda v' &= v - v_0, & \lambda w' &= w - w_0 \\ \lambda l' &= y_0 u - u_0 y, & \lambda m' &= x_0 v - v_0 x, & \lambda n' &= x_0 y - y_0 x. \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

¹ Aceste formule se obțin imediat observând că $\lambda u'$, $\lambda v'$, $\lambda w'$ sînt proiecțiile pe axe ale vectorului $\overline{A_0 A}$, iar $\lambda l'$, $\lambda m'$, $\lambda n'$ sînt proiecțiile pe axe ale momentului $\overline{O A_0} \times \overline{A_0 A}$.

Observații. 1. Toate proprietățile arătate pentru configurațiile de drepte rămân adevărate și pentru mulțimile de șuruburi de același pas. Într-adevăr, făcând $s=s_0$ (constant) în relațiile (1.122), acestea devin de asemenea liniare în u', v', w', l', m', n' . De altfel relațiile (1.121) pot fi considerate, în cazul cînd $s=s_0$ (constant), ca definind o transformare proiectivă, care, evident, lasă neschimbat rangul matricei (1.120). Această transformare arată că mulțimea dreptelor și mulțimea șuruburilor de același pas s_0 au aceleași proprietăți proiective.

2. În tabela ce urmează se dau o serie de cazuri particulare de configurații de șuruburi de pasuri diferite și de șuruburi de același pas, care pot fi utile în aplicații.

Tabela 1

Mulțimi liniare de șuruburi

Rangul	Configurația axelor centrale	
	Șuruburi de parametri diferiți	Șuruburi de același parametru ¹
0	—	—
1	Un șurub oarecare	confundate
2	a) generatoarele unui cilindroid Ball b) confundate	a) coplanare și concurente b) coplanare și paralele
3	Aparțin aceleiași congruențe de gradul al 4-lea	a) generatoare, din aceeași familie, ale unei cuadrice (riglate) b) întîlnesc trei drepte date c) întîlnesc două drepte date și sînt paralele cu același plan d) sînt coplanare e) sînt concurente în spațiu f) sînt paralele în spațiu g) aparțin la două fascicule plane care au o rază comună
4	a) aparțin aceluiași complex pătratic b) sînt paralele în spațiu	a) aparțin aceleiași congruențe de gradul întîi b) întîlnesc două drepte date c) întîlnesc o dreaptă și sînt paralele cu un plan dat d) unele sînt paralele cu o direcție dată, altele sînt drepte de la infinit ale spațiului e) unele sînt situate într-un plan, celelalte sînt concurente într-un punct din plan f) unele sînt situate într-un plan, celelalte sînt paralele cu o dreaptă din plan
5	a) paralele cu un plan dat ²	a) aparțin aceluiași complex de gradul întîi b) întîlnesc o dreaptă dată c) paralele cu un plan dat d) două stele de drepte concurente e) două stele de drepte paralele f) o stea de drepte concurente și alta de drepte paralele
6	Oarecare	Oarecare

¹ În această categorie, pentru cazul particular $s=0$, intră mulțimile de drepte.

² Acesta este un caz particular. În cazul general axele pot fi oarecare încît nu se poate recunoaște rangul 5 sau 6 al unei mulțimi de șuruburi unuia după configurația axelor lor centrale.

II. CALCULUL CU MĂRIMI FIZICE. DIMENSIUNI. UNITĂȚI. OMOGENITATE. SIMILITUDINE.

A. DIMENSIUNI. UNITĂȚI. OMOGENITATE

§ 1. **Mărime fizică.** Pentru a înțelege această noțiune, să considerăm o mulțime formată din obiecte fizice de aceeași natură și să ne referim la o anumită însușire, comună acestor obiecte. Printr-un proces de abstractizare, se poate elabora noțiunea de mărime fizică corespunzătoare acestei însușiri, dacă se îndeplinesc anumite condiții.

În primul rând este necesar să se stabilească o *relație de echivalență*, adică un criteriu după care să se poată recunoaște dacă două obiecte din mulțimea considerată sînt echivalente din punct de vedere al însușirii respective. Relația de echivalență permite repartizarea obiectelor mulțimii în *clase de echivalență*.

În al doilea rând este necesar să se stabilească între clasele de echivalență o *relație de ordonare*. Relațiile de echivalență și de ordonare, împreună, constituie condiția necesară și suficientă pentru a se putea elabora noțiunea de mărime fizică.

Ca exemplu, vom considera ca obiecte fizice forțele și ca însușiri direcția și intensitatea lor.

Dacă ne referim la *direcție*, constatăm că se poate stabili o relație de echivalență, adică se poate da un criteriu după care să se recunoască dacă două forțe au aceeași direcție. Clasele de echivalență sînt atunci formate din forțe paralele. Nu se poate însă stabili o relație de ordonare în aceste clase de echivalență, deoarece noțiunea de „direcție mai mare” sau „mai mică” este lipsită de sens. Însușirea unei forțe de a avea o direcție nu poate duce la elaborarea unei noțiuni de mărime fizică.

Dacă ne referim la *intensitate*, constatăm că, în acest caz, se poate stabili o relație de echivalență și una de ordonare. Într-adevăr, dacă două forțe deformează la fel arcul unui anumit dinamometru, spunem că ele au aceeași intensitate. Dacă deformarea produsă de forța \vec{F}_1 este mai mare decît cea produsă de forța \vec{F}_2 , spunem că intensitatea forței F_1 este mai mare decît intensitatea forței \vec{F}_2 . Rezultă că mărimea fizică *intensitatea forței* poate fi elaborată.

Procesul de elaborare al noțiunii de mărime fizică cere însă și un al treilea criteriu: acela al *comparației*. Prin acest criteriu se caută să se stabilească nu numai dacă o mărime este mai mare decît alta, ci „de cîte ori” este mai mare. În acest scop, fiecărei clase de echivalență i se atașează un număr real. Aceste numere nu pot fi atribuite însă în mod arbitrar. În primul rând trebuie respectată ordinea claselor de echivalență, deci funcția care stabilește corespondența între clasele de echivalență și mulțimea numerelor reale trebuie să fie strict crescătoare. În al doilea rând, raportul a două mărimi de aceeași natură trebuie să rămînă același. De aici rezultă că funcția f trebuie să fie liniară, deci de forma

$$f(x) = kx + f(0), \quad k > 0.$$

Rămân două constante arbitrare k și $f(0)$. Rezultă că se pot atribui numere arbitrare numai la două clase de echivalență. Pentru celelalte clase, numerele ce trebuie atașate rezultă din expresia funcției $f(x)$.

De exemplu, la măsurarea temperaturilor, clasei de corpuri care au temperatura gheții ce se topește și clasei de corpuri care au temperatura apei ce fierbe la presiune normală (760 mm Hg), li se atribuie în mod convențional, respectiv valorile: 0° și 100° (scara Celsius), 0° și 80° (scara Réaumur), 32° și 212° (scara Fahrenheit), 273° și 373° (scara temperaturilor absolute).

În mecanică și în general în fizică, sistemele de unități folosite au convenția de zero pentru aceeași clasă de echivalență, care se impune adesea în mod natural. Ceea ce diferă de la un sistem la altul este convenția cu privire la clasa căreia i se atribuie numărul unu. Un obiect fizic oarecare din această clasă poartă numele de *unitate de măsură* a mărimii fizice respective.

Se poate da o definiție a mărimii fizice independent de unitatea de măsură aleasă¹. În cele ce urmează vom folosi noțiunea de mărime fizică în sensul clasic. Vom observa că, o dată fixate convenția de zero și convenția de unitate, pentru a atribui valori numerice celorlalte clase de echivalență vor trebui efectuate măsurători ale mărimilor fizice, care caracterizează obiectele din clasele respective.

Importanța măsurării a fost precizată de către marele savant rus D. Mendeleev prin fraza, „știința începe acolo de unde începe măsurarea”.

Prin măsurare se înțelege compararea pe cale fizică (experimentală) a unei mărimi M dintr-o clasă oarecare cu mărimea de aceeași natură U din clasa căreia i s-a atribuit în mod convențional numărul unu (unitatea de măsură).

Rezultatul măsurării este un număr n care arată de câte ori mărimea U , respectiv unitatea, este cuprinsă în mărimea M , adică:

$$n = \frac{M}{U}.$$

Numărul n , care se obține ca rezultat al măsurării, este un număr abstract și se numește *valoare numerică* a mărimii M .

Mărimea fizică se exprimă sub forma unui produs între valoarea numerică și unitatea de măsură.

$$\text{mărimea} = \text{valoarea numerică} \times \text{unitatea}$$

sau, cu notațiile folosite:

$$M = nU$$

și exprimă *ecuația fundamentală a măsurării*.

Rezultatul măsurării unei mărimi va fi întotdeauna exprimat prin valoarea acelei mărimi (număr) și a unității de măsură folosită în măsurare (denumire).

¹ A se vedea R. Rădulescu și A. Timotin, O fundamentare a calculului cu mărimi fizice, independent de unitățile de măsură, Academia R.P.R., Filiala Iași, Studii și Cercetări Științifice, Fizică și Științe Tehnice, Anul XI, Fasc. 2, 1960.

Exemple: 5 m (5 metri); 12 s (12 secunde) etc.

Măsurările se execută experimental pe cale fizică cu mijloace de măsurat (aparate, substanțe, corpuri, instalații etc.) care servesc la compararea mărimii de măsurat cu unitatea de măsură, cu precizia metodei sau a aparatului de măsurat utilizat.

Nevoia măsurărilor s-a născut din cele mai vechi timpuri apărind în comerț, măsurarea terenurilor și distanțelor etc. Chinezii, egiptenii, babilonienii, grecii vechi, romanii etc. foloseau măsuri de capacitate, lungime, greutate etc. Balanța egipteană și cântarul roman erau recunoscute și folosite în toată lumea antică. Astfel, marca balanță de la templul lui Amon din Teba — Egipt (secolul al XV-lea î.e.n.) era recunoscută ca cea mai precisă balanță a antichității.

Unitățile erau însă foarte diferite, de la țară la țară și de la epocă la epocă.

La 8 mai 1790, la propunerea lui Talleyrand, Adunarea Constituantă Franceză aprobă proiectul de unificare și sistematizare a măsurilor și însărcinează Academia de Științe Franceză să găsească un sistem simplu și științific de măsurat.

Astfel a apărut sistemul metric, care a fost apoi generalizat în toate țările de pe glob, afară de țările anglo-saxone, — Anglia, Statele-Unite ale Americii etc.

Admiterea aproape unanimă a acestui sistem, care prezintă avantajul că este *simplu*, *bine determinat* și se pot deduce unitățile de același fel una dintr-alta pe *bază zecimală*, s-a extins apoi la *unitățile mecanice, electrice, calorice și optice*.

Adoptarea sistemului metric a fost făcută în baza convenției care s-a încheiat la Paris în ziua de 20 mai 1875 de către douăzeci de state participante; această convenție a fost mereu perfecționată printr-un șir întreg de legături și prin conferințe internaționale ținute în anii 1881, 1889, 1903, 1919 etc., statornicindu-se obligativitatea introducerii sistemului metric în statele respective.

Știința măsurărilor și aparatele de măsurat au făcut mari progrese în ultimul timp. Nevoile industriale și cercetările științifice de mare precizie au contribuit foarte mult la aceasta. Numeroși oameni de știință ca Ampère, Mendeleev și alții, și-au legat numele de știința măsurărilor exacte, iar institutele de cercetări și industriile sînt preocupate intens de aceste probleme.

Este absolut necesar ca unitatea de măsură să poată fi real reprodusă, cu precizia maximă posibilă, sub formă de *etalioane*.

Pentru unele mărimi (lungime, masă etc.) se poate realiza comod o unitate de măsură (metru, kilogram etc.) și se poate evalua ușor de cîte ori această unitate se cuprinde în mărimea dată, adică putem măsura direct aceste mărimi. Există însă alte mărimi (viteză, accelerație etc.), pentru care nu se poate realiza ușor o unitate de măsură și măsurarea directă, prin comparație, nu se poate efectua totdeauna.

Măsurarea indirectă a unei mărimi M se face în acest caz, măsurînd direct mărimi de specii diferite, cunoscute X, Y, Z , ale căror valori numerice x, y, z sînt legate de mărimea M printr-o relație oarecare de forma:

$$M = f(x, y, z)$$

în care, după cum se va vedea, vom face, printr-o alegere judicioasă a unităților, să nu figureze coeficienți care să depindă de unitățile respective.

Astfel, accelerația gravitației g se măsoară indirect din formula pendulului, $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ care dă pentru accelerație: $g = \pi^2 \frac{l}{t^2}$, l și t măsurîndu-se direct.

Valorile a două mărimi de aceeași natură se pot aduna după regulile algebrice, numai dacă reprezintă rezultatul unor măsurări făcute cu aceeași unitate.

Produsul unui număr oarecare de mărimi, inclusiv de factori numerici, se formează după regulile obișnuite ale produselor algebrice.

Factorul simbolic al produsului, rezultat din înmulțirea factorilor simbolici ai fiecărei mărimi, reprezintă o unitate derivată, diferită de obicei de factorii din care provine.

Unitățile și mărimile în diferite operații vor fi tratate ca factori algebrici, aplicându-li-se toate regulile algebrice.

Dacă măsurăm mărimile de aceeași speță Q_1 și Q_2 cu aceeași unitate U , rezultatele măsurării vor fi:

$$q_1 = \frac{Q_1}{U}; \quad q_2 = \frac{Q_2}{U}$$

din care se deduce imediat

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{q_2}$$

adică raportul a două mărimi de aceeași speță Q_1 și Q_2 este egal cu raportul valorilor numerice q_1 și q_2 , care se măsoară cu aceeași unitate U .

§ 2. Mărimi și unități fundamentale. Mărimi și unități derivate. Din definiția operației de măsurare, rezultă că pentru a măsura mărimile fizice ar trebui să avem tot atâtea unități de măsură diferite câte mărimi fizice diferite avem.

În realitate, mărimile fizice sînt legate prin legi și definiții determinate, care simplifică problema alegerii unităților.

Mărimile fizice alese se numesc *mărimi fundamentale*, iar unitățile de măsură corespunzătoare — *unități fundamentale*.

Restul mărimilor fizice deduse din mărimile fundamentale pe baza ecuațiilor de definiție alese pentru aceste mărimi, se numesc *mărimi derivate*, iar unitățile respective, *unități derivate*.

Astfel, viteza unui mobil în mișcare uniformă, care parcurge spațiul s în timpul t , $v = s/t$ definește viteza ca mărime derivată față de mărimile fundamentale: lungimea și timpul.

§ 3. Sisteme de unități. Examinînd unitățile mărimilor geometrice, vedem că putem reduce numărul de unități arbitrare, definind astfel un sistem de unități coordonate, care să cuprindă o unitate fundamentală (lungime) și două unități derivate (aria și volumul).

În cinematică sînt suficiente numai două unități fundamentale (lungime și timp) pentru a exprima celelalte unități ale mărimilor care se folosesc (viteza, accelerația etc.) în funcție de unitățile fundamentale.

Definim astfel pentru fiecare domeniu de măsurare sau pentru o serie de domenii de măsurare, *sistemul de unități*, drept totalitatea unităților derivate, care cuprind un domeniu determinat de măsură sau o serie de domenii de măsurare.

Mărimile fundamentale se aleg astfel încît să fie independente.

Mulțimea tuturor mărimilor fundamentale distinct alese ca bază a sistemului de unități respectiv, formează *sistemul fundamental de măsură*. În Introducere s-a văzut că Mecanica se bazează pe trei noțiuni fundamen-

tale: spațiul, timpul și masa, de unde și cele trei unități fundamentale corespunzătoare.

Există mai multe sisteme de măsură, după mărimile fundamentale care intră în compunerea lor:

a) sistemul fizic de măsură care are la bază ca unități fundamentale: lungimea, masa și timpul (LMT);

b) sistemul tehnic de măsură care are la bază ca unități fundamentale: lungimea, forța, timpul (LFT).

Principalele sisteme de măsură sînt arătate în tabela 2.

Tabela 2

Unitățile fundamentale de măsură

Sisteme	Unități de măsură folosite				Denumiri secundare
Sisteme fizice	Denumire	L	M	T	—
	CGS	1 cm	1 g	1 s	Sistem fizic
	MKS	1 m	1 kg	1 s	Sistem fizic practic
	MTS	1 m	1 t	1 s	Sistem fizic industrial
Sisteme tehnice	Denumire	L	F	T	—
	MKFS	1 m	1 kgf ¹	1 s	—

Pentru terminologie și simboluri în mecanică a se vedea și STAS 1814-50.

Sistemele fizice, spre deosebire de sistemul tehnic, au în prezent o utilizare mai extinsă, datorită faptului că în sistemul MKFS unitatea de forță kgf este o mărime dependentă de accelerația gravitației terestre (variabilă cu locul unde se face măsurarea).

§ 4. Dimensiuni. Întrucît unitățile derivate provin pe baza relațiilor matematice, din unități fundamentale, variația unităților fundamentale atrage după ea variația unităților derivate.

Va trebui deci să se găsească în special pentru cazul cînd se modifică modulul unităților sau se recalculează valoarea numerică a unei mărimi fizice, la trecerea dintr-un sistem de unități în altul — o astfel de relație, prin care să se poată stabili:

— variația unității mărimii fizice derivate, în funcție de variația unităților fundamentale;

— variația valorii numerice a rezultatului măsurării mărimii fizice, în funcție de variația unităților utilizate.

O astfel de relație, expresie a unității de măsură derivate, în funcție de unitățile de măsură fundamentale, după definiția lui Maxwell, se numește *ecuația de dimensiuni a unității mărimii date*, și poate fi privită ca o definiție succintă și ca o caracteristică a naturii fizice a mărimilor derivate.

¹ Unitatea adoptată recent pentru forță este newtonul (N). 1 N = 10⁵ dyn. Unitatea folosită pînă în prezent era 1 kgf.

Dacă se consideră un sistem de măsură oarecare — de pildă sistemul absolut de măsură — lungime, masă, timp și notăm unitatea fundamentală de lungime, masă și timp, respectiv cu L , M , T , — atunci orice unitate derivată va fi o funcție omogenă de L , M , T :

$$U = f(L, M, T).$$

Dacă la o variație de n ori a unei unități fundamentale, corespunde o variație n^α a unității derivate, atunci se spune că unitatea derivată are dimensiunea α față de unitatea fundamentală care a provocat variația dată.

Dacă o unitate derivată U are dimensiunea α față de unitatea fundamentală L , dimensiunea β față de unitatea fundamentală M și dimensiunea γ față de T , atunci ecuația de dimensiuni a unității derivate U va fi:

$$[U] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

în care:

$[U]$ este dimensiunea mărimii U ,

iar α , β , γ pot fi numere întregi, fracționare, pozitive, negative sau chiar nule.

Pentru a nu se confunda expresiile legilor fizice cu formulele de dimensiuni, unitățile absolute și formulele lor de dimensiuni se înscriu în paranteze drepte.

O ecuație de dimensiuni a unei mărimi derivate se referă întotdeauna la un sistem de unități bine determinat. Importanța ecuației de dimensiuni pentru caracterizarea naturii fizice a mărimii derivate, este foarte mare. Astfel, dacă ecuația de dimensiuni a unei mărimi A în sistemul LMT va fi de forma:

$$[A] = LMT^{-2}$$

(după cum se va vedea, A corespunde unei forțe), avem posibilitatea de a judeca imediat cum va varia această mărime, dacă vor varia unitățile fundamentale. De exemplu, din ecuația de dimensiuni se vede că, dacă unitatea de lungime crește de n ori, unitatea de forță va crește de n ori; la creșterea unității de masă de n ori și forța crește de n ori și prin creșterea unității de timp de n ori, se micșorează unitatea de forță de n^2 ori.

Trebuie precizat că dimensiunile, spre deosebire de unitățile de măsură, nu determină natura fizică a parametrului dat, ci exprimă numai forma dependenței lui de unitățile fundamentale de măsură.

Astfel, după cum vom vedea mai departe, lucrul mecanic, energia (mărimi scalare) și momentul forței (mărime vectorială) au aceeași dimensiune: L^2MT^{-2} (în sistemul LMT), adică exprimă în aceeași formă dependența lor de unitățile fundamentale de măsură, dar natura lor este diferită. Utilitatea practică a stabilirii caracterului unităților este esențială pentru unitățile derivate, care uneori nu au denumiri proprii și sînt determinate numai prin denumirea care rezultă din ecuația de dimensiuni (m/s^2 , km/h etc.).

Ecuația de dimensiuni a oricărei unități derivate se face pe baza ecuației de definiție, a relației care leagă mărimea dată de mărimile fundamentale alese sau de mărimi ale căror dimensiuni sînt cunoscute, iar pentru

dimensiunile mărimilor mai complicate se ține seama de următoarele proprietăți ale dimensiunilor:

a) Dacă valoarea numerică a unei mărimi A este egală cu produsul (sau cîmul) altor două mărimi B și C , adică $A = B \cdot C$ sau $A = B/C$ și dacă ecuațiile de dimensiuni ale mărimilor B și C sînt respectiv:

$$[B] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}, [C] = L^{\alpha'} M^{\beta'} T^{\gamma'}$$

atunci ecuația de dimensiuni a mărimii A va fi:

în primul caz:

$$[A] = L^{\alpha+\alpha'} M^{\beta+\beta'} T^{\gamma+\gamma'}$$

sau în al doilea caz:

$$[A] = L^{\alpha-\alpha'} M^{\beta-\beta'} T^{\gamma-\gamma'}$$

b) Dacă valoarea numerică a mărimii A este o putere n a valorii numerice a unei mărimi oarecare B atunci:

$$[A] = L^{\alpha n} M^{\beta n} T^{\gamma n}$$

Aplicații. 1°. Ecuația de dimensiuni a vitezei și accelerației în sistemul LMT:

$$[v] = \frac{s}{t} = \frac{L}{T} = LT^{-1}; \quad [a] = \frac{(v_2 - v_1)}{t} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

2°. Ecuația de dimensiuni a unei forțe în LMT:

$$[F] = ma = MLT^{-2}$$

3°. Ecuația de dimensiuni pentru unghiul plan (α) în sistemul LMT

$$\alpha = \frac{\text{arc}}{\text{rază}}$$

arcul fiind o lungime ca și raza; trecînd la dimensiuni avem:

$$[\alpha] = \frac{L}{L} = L^0$$

adică dimensiunile unui unghi plan în raport cu mărimile fundamentale sînt nule.

§ 5. Omogenitatea mecanică. Legile fizice exprimă, în general, egalități între mărimi fizice.

Orice egalitate între mărimi fizice are sens numai atunci cînd dimensiunile termenilor care intervin în egalitate sînt aceleași.

Egalitatea în privința dimensiunilor constituie omogenitatea mecanică.

Principiul omogenității poate fi utilizat la:

— verificarea oricărei formule teoretice sau empirice;

— stabilirea formulei reprezentînd o lege fizică;

— stabilirea dimensiunilor și a semnificației fizice a coeficienților din formule.

Aplicînd acest principiu, se poate verifica de exemplu formula prin care se obține perioada de oscilație a unui pendul $t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Lăsând la o parte valorile numerice și coeficienții fără dimensiuni și trecînd la dimensiuni avem:

$$[t] = \left[\sqrt{\frac{T}{g}} \right].$$

În sistemul LMT avem:

$$T = \sqrt{\frac{L}{L T^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

adică egalitate între ambii termeni în ceea ce privește dimensiunile.

Bineînțeles, verificarea omogenității formulelor nu atrage după sine confirmarea că și coeficienții numerici sînt exacti.

De asemenea, stabilirea formulei unei legi fizice se poate face cu ajutorul principiului omogenității, cînd experimental s-a stabilit relația între anumite mărimi.

De exemplu se constată experimental că perioada de vibrație a unei picături de apă, sub influența tensiunii superficiale, este funcție de masă și tensiunea superficială:

$$t = f(m, A).$$

Scriînd dimensiunile acestor mărimi avem:

$$[A] = M T^{-2}; [m] = M; [t] = T.$$

Intrucît principiul omogenității cere ca dimensiunile ambilor termeni să fie aceleași, rezultă că dimensiunea funcției căutate $[f(m, A)]$ trebuie să fie aceeași cu dimensiunea termenului întîi care este T și deci funcția noastră nu poate fi decît un produs de o constantă numerică (fără dimensiuni) prin $\sqrt{\frac{m}{A}}$, căci dimensiunea lui este:

$$\left[\sqrt{\frac{m}{A}} \right] = \sqrt{\frac{M}{M T^{-2}}} = T$$

și deci formula căutată va fi:

$$t = K \sqrt{\frac{m}{A}}.$$

Aplicarea omogenității permite de asemenea să se stabilească dimensiunea, adică semnificația fizică și denumirea constantelor și coeficienților care intră în diferite formule.

Un exemplu îl avem în formula mișcării uniform variate: $s = \frac{1}{2} a t^2 + b t + c$, unde prin omogenitate se poate stabili semnificația fizică a coeficienților a, b, c : $[L] = \frac{1}{2} a T^2 + b T + c$. Se vede că, pentru a avea omogenitate, a va avea dimensiunile unei accelerații $\left[\frac{L}{T^2} \right]$, b va avea dimensiunile unei viteze $\left[\frac{L}{T} \right]$ și c ale unei lungimi $[L]$. Într-adevăr: $[L] = \frac{L}{T^2} T^2 + \frac{L}{T} T + L$.

§ 6. Schimbarea unităților. Măsurarea diferitelor mărimi fizice se face cu unități de măsură potrivite. Totuși, în aplicații, este nevoie uneori să se treacă de la unele unități la altele.

Problema schimbării unităților se prezintă sub două aspecte:

- schimbarea unităților în cadrul unui sistem de măsură ales;
- schimbarea unităților în sisteme diferite.

a) *Schimbarea unităților în cadrul unui sistem de măsură ales.* Într-un sistem de măsură ales, se poate schimba o unitate de măsură cu alta, dacă este necesar, rezultatul măsurării fiind altul.

Necesitatea schimbării unităților de măsură apare întotdeauna la rezolvarea problemelor, atunci când mărimile fizice care intervin nu aparțin unuia și aceluiași sistem de măsură și dacă nu există o formulă special calculată pentru aceste unități.

De exemplu viteza poate fi calculată în km/h din formula:

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\frac{\text{km}}{1000}}{\frac{\text{h}}{3600}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

dacă spațiul este exprimat în metri și timpul în secunde.

b) *Schimbarea sistemelor de unități.* Dacă mărimea fizică A , în sistemul de unități LMT, are ecuația de dimensiuni:

$$[A] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \quad (2.1)$$

atunci, într-un alt sistem de unități XYZ, ecuația de dimensiuni va fi:

$$[A] = X^a Y^b Z^c. \quad (2.2)$$

În ambele cazuri, mărimea fizică A se va păstra, bineînțeles, aceeași și aceasta ne permite să scriem:

$$[A] \equiv L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = X^a Y^b Z^c. \quad (2.3)$$

Mărimile fundamentale din noul sistem de măsură (XYZ) exprimate în primul sistem vor fi:

$$[X] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1} \quad (2.4)$$

$$[Y] = L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2} \quad (2.5)$$

$$[Z] = L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\gamma_3} \quad (2.6)$$

și deci ecuația (2.3) devine:

$$L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = (L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1})^a (L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2})^b (L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\gamma_3})^c \quad (2.7)$$

sau încă:

$$L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = L^{a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3} M^{a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3} T^{a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3}. \quad (2.8)$$

De aici urmează că ecuațiile generale de transformare ale unităților vor fi:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \\ \beta &= a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3 \\ \gamma &= a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Tabele cu transformări ale unităților se găsesc în Manualul Inginerului, vol. I, p. 390—395, Editura Tehnică, 1954.

A p l i c a Ț i i. 1°. Să exprimăm lucrul mecanic din sistemul LMT în sistemul LFT. Transformăm ecuația dimensională a lucrului mecanic din sistemul LMT în sistemul LFT. În sistemul LMT:

$$[A] = L^3 M T^{-2}$$

În sistemul LFT:

$$[A] = L^a F^b T^c$$

Mărimea fiind aceeași:

$$L^3 M T^{-2} = L^a F^b T^c$$

Exprimînd mărimile fundamentale LFT în sistemul LMT avem:

$$L = L^1 M^0 T^0; F = L^1 M^1 T^{-2}; T = L^0 M^0 T^1$$

de unde:

$$2 = a + b; 1 = b; -2 = -2b + c$$

Rezolvînd sistemul de ecuații de transformare găsim:

$$a = 1; b = 1; c = 0$$

deci, în sistemul LFT, lucrul mecanic are dimensiunea LF.

Faptul că mărimea A se păstrează aceeași, indiferent de sistem, face să putem scrie pentru unitatea de măsură:

$$[1 \text{ kgf} \cdot 1 \text{ m}]_{\text{LFT}} = 1000 \text{ g} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot 100 \text{ cm} = 1000 \cdot 981 \cdot 100 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}$$

$$[1 \text{ kilogram forță-metru}]_{\text{LFT}} = [9,81 \cdot 10^7 \text{ erg}]_{\text{LMT (CGS)}}$$

Adică unitatea tehnică de lucru mecanic este de aproximativ 10^8 mai mare decît unitatea CGS.

2°. Să stabilim semnificația constantei în formula care dă suprafața cercului în funcție de diametru:

$$S = K D^2; K = \frac{S}{D^2}$$

și trecînd la dimensiuni:

$$[K] = \frac{[S]}{[D^2]} = \frac{L^2}{L^2} = L^0$$

adică coeficientul K nu are dimensiune, este un număr a cărui valoare depinde de unitățile în care se măsoară diametrul și suprafața.

Dacă se iau ca unități de măsură pentru lungime 1 m, iar suprafața 1 m², atunci valoarea lui K va fi, după cum se știe $K = \pi/4$:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Dacă se iau ca unități de măsură pentru lungime 1 m, iar pentru unitatea de suprafață, suprafața unui cerc al cărui diametru este egal cu 1 m, atunci $K = 1$ și formula cercului va fi:

$$S = D^2$$

În acest caz, formula suprafeței pătratului va fi $S = K_1 l^2$, în care $K_1 = 4/\pi$ și formula suprafeței pătratului în aceste unități va fi $S = \frac{4}{\pi} l^2$.

Suprafața sferei în funcție de diametru, în acest caz, ar fi dată de $S = 4 D^2$.

§ 7. Unități fundamentale ale sistemelor generale.

Unități de lungime. În Sistemul Internațional de unități de măsură, unitatea fundamentală de lungime este *metrul* (m). Metrul este lungimea

egală cu 1650763,73 lungimi de undă, în vid, ale radiației care corespunde tranziției atomului de kripton — 86 între nivelele sale $2p_{10}$ și $5d_5$ (STAS 737-62). Această definiție a fost aprobată de către a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din 1960 prin rezoluția a 6-a. Aceeași rezoluție abrogă definiția metrului din 1889¹ bazată pe prototipul internațional și stabilește ca acest prototip internațional sancționat de către prima Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din 1889, să fie păstrat în biroul Internațional de Măsuri și Greutăți în aceleași condiții ca cele fixate în 1889.

Acest etalon nu poate varia cu mai mult de 0,2 microni, precizie care astăzi nu mai este suficientă. Actualmente se pot efectua măsurări de lungime cu o precizie de 0,000025 mm, adică 0,025 microni.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul nr. 6 c, atribuit în acest scop în 1895 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS: centimetrul (cm), este a suta parte din metrul definit mai sus.

Unitățile de masă. În sistemul SI unitatea de masă este kilogramul (kg). Kilogramul este masa prototipului internațional de platină iridiată, sancționat în anul 1889, de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres — Franța.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul nr. 2 atribuit în acest scop de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți din 1889. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS: gramul (masă), care este 1/1000 din kg (masă) definit mai sus.

Unitatea de timp. În toate sistemele unitatea fundamentală de timp este secunda (s). Secunda (de timp mijlociu) reprezintă a 86 400-a parte a zilei solare mijlocii.

Anul tropic (adică intervalul mijlociu dintre două treceri consecutive ale soarelui la punctul echinoxial mijlociu de primăvară), are 365,242 198 79 de zile solare mijlocii.

Ora standard și implicit secunda sînt determinate de Biroul Internațional al Orei din Paris.

Conservarea și difuzarea orei în R.P.R. este în sarcina Observatorului Astronomic din București.

Unitatea de forță în sistemul SI este Newtonul (N).

Newtonul este forța necesară pentru a imprima, în vid, masei de 1 kg o accelerație de 1 m/s².

Pînă în ultimul timp, ca unitate de forță s-a folosit mai mult kilogramul-forță, care reprezintă forța a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internațional de masă, definit mai sus, măsurat în vid, la accelerația normală a gravitației de 9,80665 m/s².

În afară de unitățile fundamentale definite mai sus, mai sînt și unitățile derivate, dependente de sistemul ales. Pentru unitățile fundamentale și unitățile derivate s-a întocmit tabela 3.

¹ Metrul este lungimea, la temperatura de 0°C, a prototipului internațional de platină iridiată, sancționat în 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres-Franța.

Tabela 3

Unitățile mărimilor geometrice și mecanice

Mărimea	Simbol	Ecuația de definiție	Dimensiuni în sistemul		Unități în sistemul		
			LMT	LPT	CGS	SI	MKS
Lungime	l	—	L	L	cm	m	m
Masă	m	$mt = \frac{F^1}{a}$	M	$L^{-1}PT^2$	g	kg	$\frac{kgf \cdot s^2}{m}$
Timp	t	—	T	T	s	s	s
Arie	A	$A = l^2$	L^2	L^2	cm ²	m ²	m ²
Volum	V	$V = l^3$	L^3	L^3	cm ³	m ³	m ³
Unghi plan	α	$\alpha = \frac{s}{r}$	1	1	rad	rad	rad
Viteză	v	$v = \frac{s}{t}$	LT^{-1}	LT^{-1}	cm/s	m/s	m/s
Accelerație	a	$a = \frac{v}{t}$	LT^{-2}	LT^{-2}	cm/s ²	m/s ²	m/s ²
Viteză unghiulară	ω	$\omega = \frac{\theta}{t}$	T^{-1}	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s
Accelerație unghiulară	ϵ	$\epsilon = \frac{\omega}{t}$	T^{-2}	T^{-2}	rad/s ²	rad/s ²	rad/s ²
Perioadă	T	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	T	T	s	s	s
Frecvență	f	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	T^{-1}	Hz	Hz	Hz
Forță	F	$F = ma^2$	LMT^{-2}	F	dyn	N	kgf
Percușiune	P	$P = Ft$	LMT^{-1}	FT	dyn·s	N·s	kgf·s
Momentul unei forțe (cuplu)	\mathcal{M}	$\mathcal{M} = Fl$	L^2MT^{-2}	L^2F	dyn·cm	N·m	kgf·m
Impuls (cantitate de mișcare)	H	$H = mv$	LMT^{-1}	FT	$\frac{g \cdot cm}{s}$	$\frac{kg \cdot m}{s}$	kgf·s
Energie	W, E	$E = \frac{1}{2}mv^2$	L^2MT^{-2}	L^2F	erg	J	kgf·m
Lucru mecanic	W, L	$L = Fl \cos(\vec{F}, \vec{l})$	L^2MT^{-2}	L^2F	erg	J	kgf·m

¹ Definiția în sistemul MKS.² Definiția în sistemele CGS și SI.

Tabela 3 (continuare)

Mărimea	Simbol	Ecuația de definiție	Dimensiuni în sistemul		Unități în sistemul		
			LMT	LFT	CGS	SI	MKS
Putere	P	$P = \frac{W}{t}$	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	erg/s	W	kgf·m/s
Moment de inerție al masei	J	$J = ml^2$	L^2M	LFT^2	$g \cdot cm^2$	$kg \cdot m^2$	$m \cdot kgf \cdot s^2$
Moment cinetic	K	$K = mvr = J\omega$	L^2MT^{-1}	LFT	$g \cdot cm^2/s$	$kg \cdot m^2/s$	$m \cdot kgf \cdot s$
Presiune	P	$P = \frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	dyn/cm ²	N/m ²	kgf/m ²
Masă specifică (densitate)	ρ	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	g/cm ³	kg/m ³	kgf·s ² /m ⁴
Greutate specifică	γ	$\gamma = \frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	dyn/cm ³	N/m ³	kgf/m ³

Observație. În sistemul MKfS, se notează uneori cu „u” unitatea tehnică de masă, adică $u = \frac{kgf \cdot s^2}{m}$.

Unitățile alese se folosesc cu multiplii și submultiplii lor, formați pentru toate unitățile în sistemul zecimal. Fac excepție timpul și submultiplii vechi ai unghiului drept (formați în sistemul sexagesimal). De asemenea fac excepție sistemele anglo-saxone, care nu respectă sistemul zecimal.

În tabela 4 sînt date prefixe și simboluri pentru multiplii și submultiplii zecimali.

Tabela 4

Prefixe și simboluri pentru multiplii și submultiplii zecimali

Prefixe	Simboluri	Factori de multiplicare a unităților de referință	Prefixe	Simboluri	Factori de multiplicare a unităților de referință
pico	p	10^{-12}	deca	da	10^1
nano	n	10^{-9}	hecto	h	10^2
micro	μ	10^{-6}	kilo	k	10^3
centimili	cm	10^{-4}	miria	ma	10^4
decimili	dm	10^{-1}	hectokilo	hk	10^5
milli	m	10^{-3}	mega	M	10^6
centi	c	10^{-2}	giga	G	10^9
deci	d	10^{-1}	tera	T	10^{12}
—	—	10^0			

* Definiția în sistemele CGS și SI

Scrierea prefixelor și simbolurilor pentru multiplii și submultiplii valorilor care nu se găsesc în tabelă, precum și formarea prefixului compus etc., se face după regulile cunoscute.

§ 8. Unități cu denumiri speciale și unități în afara sistemelor. În afară de unitățile sistemelor generale și cu utilizare restrinsă, în practică, în tehnică și fizică, se folosesc diferite unități care nu se încadrează în nici unul dintre sistemele studiate până acum. Ele sînt în circulație datorită interesului practic pe care-l prezintă sau în virtutea tradiției utilizării lor.

Principalele unități de acest fel, care se folosesc în unele împrejurări, sînt:

Lungime	Micron (μ)	$1 \mu = 10^{-4} \text{ cm}$
	Angström (\AA)	$1 \text{\AA} = 10^{-8} \text{ cm}$
	Unitate X (U.X.)	$1 \text{ U.X.} = 10^{-11} \text{ cm}$
	An lumină	$1 \text{ an lumină} = 9,461 \cdot 10^{12} \text{ km}$
	Parsec	$1 \text{ parsec} = 30,84 \cdot 10^{12} \text{ km}$
	Milă marină (Mm)	$1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$
	Țol	$1 \text{ țol} = 2,54 \text{ cm}$
Suprafață:	Ar (a)	$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
	Hectar (ha)	$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$
Volum:	Ster (st)	$1 \text{ st} = 1 \text{ m}^3$
Capacitate:	Litru (l)	$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$
	Dublu decalitru (ddal)	$1 \text{ ddal} = 20 \text{ l} = 20 \text{ dm}^3$
Unghi plan:	Milime adevărată (m_a)	$1 m_a = 10^{-3} \text{ rad}$
Masă:	Mol (mol)	cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame, este numeric egală cu greutatea moleculară
		$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$
Țimp:	Oră (h)	
Viteză:	Nod (Nd)	$1 \text{ Nd} = 1 \text{ Mm/h} = 1\,852 \text{ m/h}$
Forță:	Tonă-forță (tf)	$1 \text{ tf} = 1\,000 \text{ kgf}$
	1 chintal (q)	$1 \text{ q} = 100 \text{ kgf}$
Energie:	Calorie mare (kcal)	$1 \text{ kcal} = 427 \text{ kgf} \cdot \text{m} = 4,18 \cdot 10^{10} \text{ erg}$
	Calorie mică (cal)	$1 \text{ cal} = 0,427 \text{ kgf} \cdot \text{m}$
Putere:	Cal-putere (CP)	$1 \text{ CP} = 75 \text{ kgf} \cdot \text{m/s}$
Presiune:	Bar (bar)	$1 \text{ bar} = 10^6 \text{ barye}$
	Atmosferă fizică (At)	$1 \text{ At} = 1,03322 \text{ kgf/cm}^2 = 760 \text{ mm Hg}$
	Atmosferă tehnică (at)	$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2$
	Torr (torr)	$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg}$

Sistemul de unități legal în R.P.R. este sistemul zecimal.

§ 9. Unități științifice. Pentru a se evita erori care s-ar datora unor factori externi greu de combătut (variația lungimilor din cauza variației temperaturii, variația gravitației cu latitudinea și altitudinea etc.), s-au stabilit și unități științifice, care sînt practic invariabile.

§ 9. Alte sisteme de unități. În afară de unitățile bazate pe sistemul zecimal, mai sînt sisteme bazate pe tradiție sau pe alte considerații. Astfel, unitățile anglo-saxone și americane sînt bazate pe un sistem tradițional, fără relații științifice între diferitele unități, ceea ce dă dificultăți în calcule. De exemplu:

$1 \text{ yard} = 0,914398 \text{ m} = 3 \text{ picioare} = 36 \text{ degete}$

$1 \text{ llvră} = 16 \text{ uncii} = 1/14 \text{ stone}$

1 HP=76,040 kgf·m/s

1 milă=8 forlongs=320 poles=1 760 yards=63 360 inches (pe uscat)=72 960 inches (pe mare).

Sistemul cel mai general este sistemul zecimal care simplifică considerabil calculele și le ușurează din punct de vedere matematic. Avantajele se văd în deosebi în industrie și în calculele științifice și tehnice.

§ 10. Unități vechi de măsură. Până la introducerea sistemului metric au funcționat atât în țara noastră cât și în alte țări, unități de măsură locale cu caracter tradițional istoric.

Astfel, în Muntenia, Moldova și Transilvania s-au folosit următoarele unități:

Pentru lungimi: stinjenul Șerban-Vodă, 1 stj=8 palme=64 degete=640 linii=1,9665 m;
1 prăjină=3 stj;

stinjenul Constantin-Vodă avea 2,02 m;

1 cot=9 rupi=16 grefi=0,664 m; 1 poștă avea aproximativ 10 000 stj.

Stinjenul moldovenesc sau gospod: 1 stj=8 palme=64 palmace=768 linii=2,23 m.

Prăjina moldovenească avea 4 stj, iar cotul moldovenesc 0,637 m.

Stinjenul transilvănean (cadastral): 1 stj=6 picioare=144 țoli=1 728 linii=1,89648 m.

Pentru suprafețe: în Muntenia, pogonul reprezenta un dreptunghi cu o latură de 72 stj (24 prăj.), și cealaltă de 18 stj. (6 prăj.), avind o suprafață de 144 prăjini pătrate=1 296 stj. pătrați=5 011,7891 m².

În Moldova, falcea avea 80 prăjini fâlcești=2 880 stj. pătrați=14 320,952 m².

În Transilvania, 1 jugăr cadastral=576 prăjini pătrate=1 600 stj. pătrați=57 600 picioare pătrate=5 754,6415 m².

Unitățile de greutate erau:

În Muntenia și Moldova: ocaua=4 litre=1 271,86 g (în Muntenia) și 1 281 g (în Moldova).

În U.R.S.S. se foloseau, în trecut, următoarele unități de măsură:

Pentru lungimi: 1 verstă=1,067 km;

1 sajen (sj)=3 arșini=48 verșoci=2,134 m.

Pentru suprafețe: 1 verstă pătrată=1,138 km²;

1 desiatină=1,093 ha;

1 sajen pătrat=4,552 m².

Pentru greutate:

1 pud=40 funzi=1 280 loți=16,38 kg.

B. SIMILITUDINE. TEORIA MODELELOR

§ 11. Similitudine. Modele. Teoria similitudinii dinamice a fost enunțată pentru prima dată de Newton, care a aplicat-o în Mecanica fluidelor. După el, diferiți cercetători (Froude, Cauchy, Reynolds, Mach, Maiewski etc.) au formulat legi de similitudine, referindu-se în special la probleme din Mecanica fluidelor.

La baza teoriei similitudinii stau două postulate.

1. Desfășurarea oricărui fenomen fizic poate fi exprimată cu ajutorul mijloacelor de care dispun matematicile, în general printr-un sistem de ecuații funcționale care stabilesc relațiile dintre diferitele mărimi fizice caracteristice aceluia fenomen.

2. Desfășurarea unui fenomen fizic nu depinde de sistemul de unități în care sînt măsurate mărimile fizice caracteristice ale fenomenului studiat.

Similitudinea are trei teoreme de bază:

1) Valorile criteriilor de similitudine omoloage a două procese fizice asemenea sînt egale.

Teorema permite extinderea rezultatelor unor criterii experimentale la toate fenomenele asemenea celui studiat.

Ea a fost enunțată inițial de Newton (1686). A fost folosită de V. L. Kiripicev în probleme de elasticitate, iar actuala formă a teoriei a fost dată de T. A. Afanasieva—Ehrenfest (1915) care a aplicat-o în analiza dimensională.

2) Orice proces fizic poate fi descris cu ajutorul unor relații funcționale între criteriile de similitudine respective.

Teorema a fost enunțată în 1911 de către prof. Federman din Petersburg.

3) Pentru ca două procese fizice să fie asemenea, condiția necesară și suficientă este ca ele să fie calitativ asemenea, iar criteriile lor de similitudine omoloage să ia valori egale.

Teorema a fost enunțată inițial de prof. V. L. Kiripicev din Petersburg (1874), care a explicat-o la fenomene elastice, iar demonstrația ei a fost dată de acad. M. V. Kiripicev (1930), ultima demonstrație (1954) bazându-se pe teoria grupurilor lui Lie.

Similitudinea a devenit în ultimele decenii un instrument de cercetare în toate domeniile fizicii și tehnicii.

Adesea similitudinea permite simplificarea unor probleme foarte complicate, precum și reducerea cercetărilor la un număr suficient de mic de cazuri tipice.

În rezolvarea multor probleme importante din domeniul hidrodinamicii, aerodinamicii, termotehnicii, elasticității etc. se întâmpină uneori dificultăți matematice imposibil de învins, iar alteori fenomenul studiat este atât de complicat și depinde de atât de mulți parametri, încât nici nu i se pot stabili ecuațiile mișcării.

În astfel de cazuri, la construcția avioanelor, vapoarelor, digurilor și a altor construcții complexe se folosesc și metode experimentale, bazate pe teoria similitudinii și a modelelor.

Experimentul are dublu scop:

a) Permite ca dintr-un număr mic de experiențe să fie deduse legi valabile pentru multiple și variate fenomene din diferite domenii ale fizicii;

b) Permite înlocuirea studiului fenomenelor reale prin studiul fenomenelor calitativ asemenea, la scară redusă (sau amplificată), fenomene care pot fi realizate practic în laboratoare.

Pentru a ne da seama de modul în care se vor comporta anumite construcții proiectate și pe care le vom numi *originale* (sau *prototipuri*) se recurge adesea la executarea unor construcții similare, de obicei la o scară redusă, denumite *modele* sau *machete*. În scopul de a se stabili modul în care se vor comporta originalele în exploatare, se supun modelele în laboratoare la acțiuni analoge acelor la care vor fi supuse originalele. Înlocuirea studiului unui fenomen din natură prin studierea în laborator a unui fenomen analog pe un model redus sau amplificat, constituie studiul prin *modelare*.

Studiul fenomenului fizic este înlocuit astfel prin studiul unui fenomen similar (de exemplu macheta unui baraj sau a unui avion) care se realizează practic mult mai comod și mai ieftin, și asupra căruia se fac în laborator încercări similare celor la care va fi supus prototipul în realitate.

Vom aminti și o metodă mai recentă, numită *cromoplasticitate*, care folosește un material special (cromoplastic) pentru studiul pe modele al comportării pieselor intrate în zona elasto-plastică¹.

Se fac astfel măsurări de traiectorii, timpuri, viteze, accelerații, forțe, tensiuni, lucruri mecanice, puteri, temperaturi etc.

Similitudinea fizică poate fi considerată ca o generalizare a similitudinii geometrice. Din geometrie se știe că două figuri geometrice sînt asemenea, dacă lungimile lor corespunzătoare sînt în același raport de asemănare, numit scară.

Vom spune, prin analogie, că două fenomene fizice sînt similare, dacă putem obține caracteristicile unuia, din ale celui alt, printr-un simplu calcul, pe baza scărilor respective.

Dacă toate mărimile care iau parte la fenomenul mecanic se transpun asemenea de pe original pe model, avem *similitudine mecanică generală*. Pentru un astfel de model sînt valabile toate legile aplicabile originalului.

Deoarece unele mărimi ca accelerația gravitației, greutatea specifică, coeficientul de elasticitate, frecarea etc. nu pot fi modificate după voie, în practică se utilizează o *similitudine incompletă*, obținîndu-se similitudinea numai pentru mărimile de bază ale fenomenului.

Problemele similitudinii a două sisteme de puncte materiale pot fi examinate din diferite puncte de vedere, în funcție de care avem următoarele feluri de similitudine: geometrică, statică, cinematică, dinamică, termică etc.

În cele ce urmează se vor nota, în genere, cu litere mici mărimile pe model și cu majusculele respective mărimile pe prototip. În cazul cînd trebuie să folosim aceeași literă atît pentru dimensiunea modelului, cît și pentru aceea a prototipului, aceasta se pune în paranteză.

a) *Similitudinea geometrică*. În similitudinea geometrică întîlnim numai *spațiul*. Similitudinea geometrică se referă numai la forma corpului, care trebuie să aibă lungimile omoloage proporționale, iar unghiurile omoloage egale. În geometrie avem o singură mărime fundamentală, *lungimea* $[L]$ cu ajutorul căreia pot fi măsurate toate mărimile geometrice: unghiuri, lungimi, suprafețe, volume, ale căror formule de dimensiuni sînt respectiv $[L^0]$, $[L^1]$, $[L^2]$, $[L^3]$.

Notînd cu l lungimile pe model și cu L pe prototip avem:

$$\text{scara lungimilor} \quad \frac{l}{L} = \lambda \quad (2.10)$$

$$\text{scara suprafețelor} \quad \frac{A}{(A)} = \lambda^2 \quad (2.11)$$

$$\text{scara volumelor} \quad \frac{V}{(V)} = \lambda^3 \quad (2.12)$$

de unde rezultă că, pentru model vom avea:

$$l = \lambda L, \quad A = \lambda^2 (A), \quad V = \lambda^3 (V).$$

¹ „Cromoplasticitate” — Ștefan Bălan, S. Răutu, N. Goldenberg, V. Petcu; Comunicări Academia R.P.R. — nr. 11/1958.

b) *Similitudinea cinematică*. Spunem că mișcările a două sisteme sînt cinematic asemenea dacă traiectoriile mișcărilor ambelor sisteme sînt geometric asemenea și dacă vitezele tuturor punctelor omoloage ale sistemelor sînt în același raport.

În similitudinea cinematică se folosesc două scări fundamentale:

$$\text{scara lungimilor (2.10)} \quad \frac{l}{L} = \lambda$$

și

$$\text{scara timpurilor} \quad \frac{t}{T} = \tau \quad (2.13)$$

unde t este timpul fenomenului pe model, iar T este timpul corespunzător pe prototip.

Scara vitezelor corespunzătoare pe model și prototip este

$$\frac{v}{(v)} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \tau^{-1}. \quad (2.14)$$

Scara accelerațiilor este

$$\frac{a}{(a)} = \frac{\lambda}{\tau^2} = \lambda \tau^{-2}. \quad (2.15)$$

Scara rotațiilor este aceeași cu a vitezelor unghiulare:

$$\frac{n}{(n)} = \frac{\omega}{(\omega)} = \tau^{-1}; \quad (2.16)$$

iar scara accelerațiilor unghiulare este

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon)} = \tau^{-2}. \quad (2.17)$$

c) *Similitudinea dinamică*. Două sisteme de puncte materiale sînt dinamic asemenea, dacă, pe lângă similitudinea cinematică, au masele într-un același raport și dacă sînt egale raporturile între forțele omoloage care acționează asupra punctelor omoloage ale celor două sisteme.

În dinamică există trei scări fundamentale: scara lungimilor λ dată de (2.10), scara timpurilor τ dată de (2.13) și scara maselor

$$\frac{m}{M} = \mu \quad (2.18)$$

unde m este masa pe model, iar M este masa respectivă pe prototip.

Pentru viteze folosim scara (2.14), iar pentru accelerații scara (2.15) de la similitudinea cinematică.

Notînd cu f forța pe model și cu F forță respectivă pe prototip, pe baza legii a doua a lui Newton obținem scara forțelor:

$$\frac{f}{F} = \frac{ma}{M(a)} = \frac{m}{M} \cdot \frac{a}{(a)} = \mu \frac{\lambda}{\tau^2}$$

adică:

$$\frac{f}{F} = \mu \frac{\lambda}{\tau^2} = \chi. \quad (2.19)$$

Expresia $\chi = \lambda \mu \tau^{-2}$ este cunoscută sub denumirea de *ecuația caracteristică a lui Bertrand*; ea stabilește relația fundamentală între cele patru scări principale de similitudine λ , μ , τ și χ .

Pentru celelalte mărimi derivate se obțin imediat următoarele scări: scara lucrului mecanic

$$\frac{L}{(L)} = \frac{f l}{F L} = \chi \lambda = \mu \lambda^2 \tau^{-2}, \quad (2.20)$$

scara puterilor

$$\frac{P}{(P)} = \frac{f l l}{F L T} = \chi \lambda \tau^{-1} = \mu \lambda^2 \tau^{-3}, \quad (2.21)$$

scara greutăților specifice

$$\frac{\gamma}{(\gamma)} = \frac{f l l^2}{F L^3} = \chi \lambda^{-2} = \mu \lambda^{-2} \tau^{-2}, \quad (2.22)$$

scara densităților

$$\frac{\rho}{(\rho)} = \frac{m/V}{M/(V)} = \mu \lambda^{-3}. \quad (2.23)$$

Cu aceste scări se lucrează în diferite *legi de similitudine*, numite uneori și *legi de modelizare*.

§ 12. Legea generală de similitudine a lui Newton. Să admitem un sistem de puncte materiale A_i considerat ca model și un al doilea sistem de puncte materiale (A_i) considerat ca prototip, asemenea cu primul sistem, din punct de vedere geometric, cinematic și dinamic.

Fie λ , μ și τ cele trei scări ale mărimilor fundamentale, date respectiv de expresiile (2.10), (2.18), (2.13).

Să determinăm scara care trebuie aleasă pentru forțe, astfel încât să existe similitudine dinamică pentru mișcările celor două sisteme de puncte materiale.

Pentru aceasta este necesar ca ecuațiile diferențiale ale mișcării modelului și prototipului să fie identice.

Așa cum se va arăta în dinamică, ecuațiile mișcării sistemelor sînt date de principiul lucrului mecanic virtual sub forma:

$$\Sigma (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \delta \bar{r}_i = 0 \quad (2.24)$$

pentru model și

$$\Sigma [(\bar{F}_i) - M_i (\bar{a}_i)] \delta (\bar{r}_i) = 0 \quad (2.25)$$

pentru prototip, unde prin \bar{F}_i s-a notat rezultanta forțelor date aplicate în punctul A_i de masă m_i și accelerație \bar{a}_i , prin $\delta \bar{r}_i$ deplasarea virtuală a punctului A_i de pe model, iar prin (\bar{F}_i) , M_i , (\bar{a}_i) și $\delta (\bar{r}_i)$ mărimile respective ale punctului (A_i) de pe prototip.

Forțele $-m_i \bar{a}_i$ și $-M_i (\bar{a}_i)$ sînt forțele de inerție corespunzătoare punctelor A_i și (A_i).

Ținînd seama de scările λ , μ , τ ale mărimilor fundamentale, raportul dintre valoarea forțelor de inerție pe model și prototip este

$$\frac{m_i \bar{a}_i}{M_i (\bar{a}_i)} = \lambda \mu \tau^{-2} = \chi. \quad (2.26)$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuațiile (2.24) și (2.25) să fie identice este ca forțele \bar{F}_1 și (\bar{F}_1) să fie în același raport $\alpha = \lambda \mu \tau^{-2}$ dat de (2.26), de unde rezultă:

$$\bar{F}_1 = \alpha (\bar{F}_1) = \lambda \mu \tau^{-2} (\bar{F}_1). \quad (2.27)$$

Relația (2.26) exprimă *legea de similitudine a lui Newton*.

Din relația (2.27) rezultă:

- a) Forțele respective de pe model și prototip trebuie să fie paralele.
- b) Raportul modulelor lor trebuie să fie constant și egal cu

$$\alpha = \lambda \mu \tau^{-2}.$$

Legea similitudinii se poate obține și pe calea ecuațiilor dimensionale ale mărimilor care intră în ecuațiile mișcării. Astfel, să considerăm o mișcare oarecare a unui sistem din natură și să schimbăm unitățile cu care se măsoară valorile ce intră în ecuația de mișcare. Dacă micșorăm unitatea de lungime de λ ori, unitatea de masă de μ ori și unitatea de timp de τ ori, unitatea pentru măsurarea forțelor se va micșora de $\lambda \mu \tau^{-2}$ ori. Rezultă că cifrele care reprezintă valorile lungimilor, maselor, timpurilor și forțelor se vor mări respectiv de λ , μ , τ și α ori; noile cifre trebuie să satisfacă ecuațiile anterioare ale mișcării. Această a doua demonstrație a legii generale a similitudinii ne prezintă legea similitudinii în dinamică ca o consecință a omogenității tuturor termenilor care intră în ecuațiile de mișcare.

Ca exemplu să considerăm mișcarea centrală a două sisteme, forța de atracție fiind proporțională cu masa punctelor și cu distanța lor la puterea n . Raportul forțelor de atracție ale celor două sisteme este:

$$\alpha = \frac{f}{F} = \frac{mr^n}{MR^n} = \mu \lambda^n. \quad (2.28)$$

Din egalarea expresiei (2.28) cu (2.19) rezultă:

$$\tau^2 = \lambda^{1-n}. \quad (2.29)$$

Considerînd că punctele descriu orbite în jurul centrului atractiv O rezultă că τ este egal cu raportul timpurilor de rotație a maselor în jurul lui O .

În cazul particular $n = -2$, adică atunci cînd forța de atracție este invers proporțională cu pătratul distanțelor, formula (2.29) devine:

$$\tau^2 = \lambda^3$$

care exprimă că pătratele timpurilor de rotație sînt proporționale cu cuburile distanțelor; se găsește astfel pe această cale cea de-a treia lege a lui Kepler.

§ 13. Legile speciale de similitudine. Legea de similitudine a lui Newton impune ca toate forțele care acționează asupra celor două sisteme considerate să se găsească în raportul α dat de (2.26).

Deoarece în practică nu toate forțele pot fi reduse în acest raport, se consideră în fiecare caz în parte numai similitudinea acelor forțe care se

consideră predominantă pentru fenomenul respectiv, neglijându-se forțele secundare. Astfel, după natura forțelor considerate ca predominante, se obțin diferite legi speciale de similitudine, de forma:

$$\tau = \psi(\lambda). \quad (2.30)$$

Fără a intra în studiul legilor speciale de modelizare, vom cita pe cele mai importante.

a) Dacă se consideră că forțele principale care produc mișcarea sînt *forțele de gravitație* se obține legea de similitudine a lui Froude:

$$\tau = \sqrt{\lambda}. \quad (2.31)$$

b) Dacă se consideră *forțele elastice* ca forțe predominante se obține legea de similitudine a lui Cauchy:

$$\tau = \lambda. \quad (2.32)$$

c) Considerînd că *forțele de frecare interioare* au acțiune dominantă în ecuațiile de mișcare, cum este în cazul lichidelor vîscoase, se obține legea de similitudine a lui Reynolds:

$$\tau = \lambda^2. \quad (2.33)$$

Astfel de legi speciale de similitudine au o importanță deosebită în diferitele domenii ale mecanicii aplicate. Studiul lor se face, însă, la disciplina științifică corespunzătoare.

PARTEA A DOUA
STATICA

§ 1. Generalități. Statica este acea parte a mecanicii care studiază transformarea sistemelor de forțe aplicate corpurilor solide în sisteme echivalente și condițiile de echilibru ale sistemelor de forțe.

Un sistem de forțe este constituit dintr-un ansamblu de forțe considerat în totalitatea lui; un sistem de forțe este echivalent cu un ansamblu de forțe dat (primar), dacă se poate substitui ansamblului de forțe primar fără să-i modifice efectele mecanice asupra unui corp solid dat.

În statică este vorba de un echilibru relativ, adică în raport cu un sistem de referință ales. În vorbirea curentă se spune adeseori, că se realizează echilibrul corpurilor, nu echilibrul sistemelor de forțe — acest lucru fiind îndreptățit, deoarece existența forțelor presupune întotdeauna existența corpurilor.

Vom studia în primul rând statica punctului material și apoi statica corpului solid, considerând corpurile, pe rând, libere sau cu legături față de mediul înconjurător. Acolo unde va fi cazul se vor considera și frecările. Sistemele de forțe vor fi considerate în cazul lor cel mai general situate oricum în spațiu, sau în cazuri particulare: forțe concurente, forțe paralele în plan etc.

Din punct de vedere istoric, statica s-a dezvoltat cu mult înaintea celorlalte capitole ale Mecanicii, din nevoia oamenilor de a construi sau de a-și face dispozitive care să le ușureze munca, fapt care cerea să se studieze mai îndeaproape problemele legate de echilibrul unor corpuri. Astfel, în antichitate, *Arhimede* (287—212 î. e. n.) este primul care a dat formulare teoretică unor probleme de mecanică, bazându-se pe practică și pe calcule matematice. Din acest punct de vedere, el poate fi socotit ca părinte al mecanicii teoretice. El a enunțat prima dată legea pârghiilor, a definit centrul de greutate al unor corpuri, a pus bazele hidrostatiei (celebrul principiu care îi poartă numele), a studiat șurubul etc.

Mai târziu *Pappus* (secolul al IV-lea e. n.) încearcă să continue cercetările lui *Arhimede* cu privire la mașinile simple ale timpului său și la centrele de greutate. El a enunțat două teoreme care au fost reluate mai târziu de *Guldin*.

Abia mult mai târziu, începând din secolul al XVI-lea, statica a înregistrat progrese mai importante. *Simon Stevin* (1548—1620) a publicat în 1586 opera sa remarcabilă relativ la statică și hidrostatică, în care studiază echilibrul corpurilor grele pe planul înclinat și ajunge la regula paralelogramului pentru compunerea forțelor concurente. Această lege a fost regăsită mai târziu de *Galilei* (1564—1642) care o generalizează și pentru cazul mișcării corpurilor. *Newton* (1642—1727) enunță principiile de bază ale mecanicii, care au contribuit amplu la dezvoltarea mecanicii în general și care au dus și la precizarea unor capitole din statică. *Varignon* (1654—1722) a stabilit teorema momentelor și a studiat mașinile simple. Mai târziu, *Poinsot* (1777—1859) introduce în statică teoria cuplurilor, iar în secolele al XIX-lea și al XX-lea statica a ajuns la forma actuală.

III. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

A. STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

§ 1. Punct material liber. Punct material supus la legături. Se înțelege prin *punct material liber*, un punct material care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția sa fiind determinată numai de forțele care acționează asupra lui, nu și de alte condiții geometrice. Poziția sa este definită de trei parametri independenți, coordonatele punctului.

Se înțelege prin *punct material supus la legături* un punct material obligat să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix din spațiu.

În aceste cazuri, poziția punctului poate fi definită cu ajutorul unui număr mai redus de parametri. Astfel, în cazul unui punct obligat să rămână pe o suprafață sînt necesari numai doi parametri independenți, coordonatele curbilinii ale punctului. În cazul unui punct obligat să rămână pe o curbă este necesar un singur parametru, iar în cazul unui punct obligat să rămână într-un anumit punct din spațiu nu este nevoie de nici un parametru.

Numărul de parametri necesari pentru a defini poziția unui punct definește numărul de *grade de libertate*. Astfel, un punct material liber are trei grade de libertate; un punct material obligat să rămână pe o suprafață are două grade de libertate; un punct material obligat să rămână pe o curbă are un grad de libertate, iar un punct material obligat să rămână într-un punct fix din spațiu nu are nici un grad de libertate.

Exemplu. Punctul material M de greutate \bar{G} , legat cu trei fire petrecute peste trei scripeți foarte mici, A , B și O (fig. 3.1, *a*) la capetele cărora atîrnă greutatea P , Q , S , este un punct material *liber*, pentru că el poate ocupa orice poziție în spațiu. Bineînțeles că el ocupă o anumită poziție de echilibru determinată de forțele \bar{P} , \bar{Q} , \bar{S} și \bar{G} .

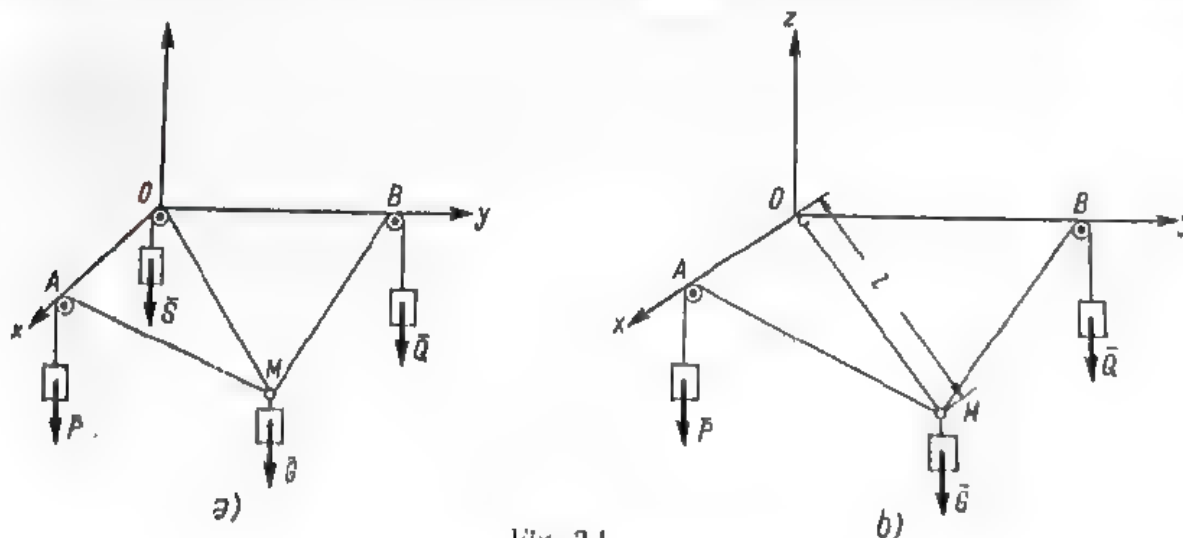


Fig. 3.1

Cu totul altă este situația punctului material M din fig. 3.1, *b* legat de punctul O cu un fir OM inextensibil, de lungime l și cu două fire trecute peste doi scripeți foarte mici A și B la capetele cărora atîrnă respectiv greutatea P și Q .

Dacă firul OM este înțins, punctul material este obligat să rămână pe o sferă cu centrul în O și avînd raza l . Deci, poziția sa de echilibru nu este determinată numai de forțele \bar{P} , \bar{Q}

și G , ei și de obligația geometrică de a rămâne pe sferă. Răstoare deci vorba de un punct material supus la legături.

§ 2. Punct material liber acționat de sisteme de forțe concurente. Să considerăm un corp pentru care se poate folosi ca model mecanic punctul material și un sistem de forțe care acționează asupra acestuia. Punctele de aplicație ale forțelor sistemului coincid și nu pot fi schimbate, deci forțele sînt *concurente* și au caracter de vectori *aplicați* (legăți).

Experiența arată că, dacă în particular asupra punctului material O acționează simultan două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , acestea pot fi înlocuite cu o forță unică \vec{R} denumită *rezultantă*. Mărimea, direcția și sensul rezultantei sînt date de diagonala paralelogramului construit cu ajutorul vectorilor care reprezintă cele două forțe

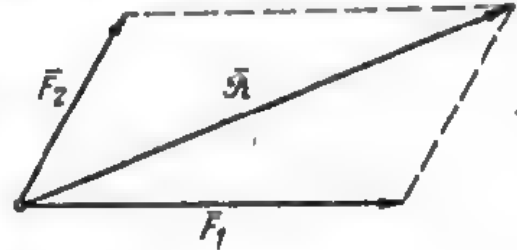


Fig. 3.2

(fig. 3.2). Acest rezultat experimental este cunoscut sub numele de *principiul paralelogramului*. El pune în evidență faptul că forțele sînt mărimi vectoriale pentru care se aplică operația de adunare definită în calculul vectorial prin *regula paralelogramului* și în general toate operațiile și rezultatele valabile pentru vectorii concurenți (cap. I, § 17).

Pentru acest caz se pot face următoarele observații:

a) *Operații elementare de echivalență*. Într-un sistem de forțe concurente se pot înlocui, după regula paralelogramului, două dintre forțe cu rezultanta lor sau una dintre forțe cu componentele ei pe două direcții concurente, fără ca efectul mecanic al sistemelor de forțe asupra punctului să se schimbe. În particular, se pot suprima sau introduce două forțe de același modul și opuse. Acestea sînt operații elementare de echivalență.

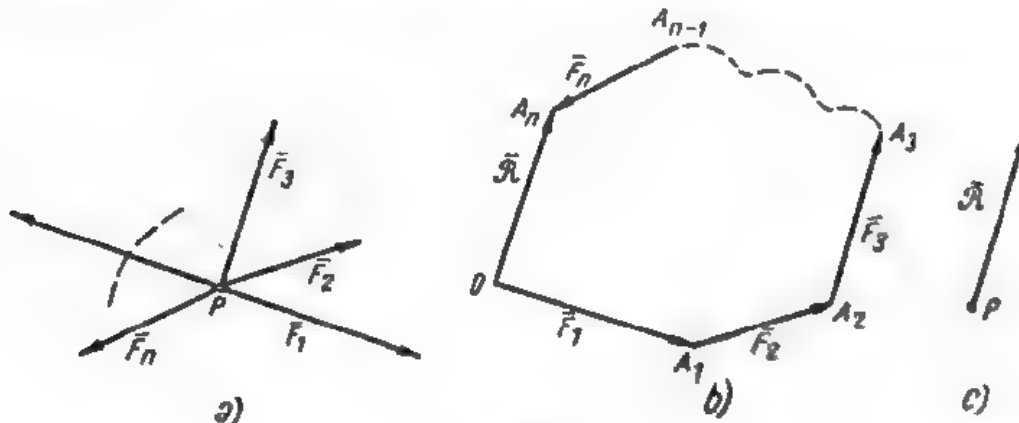


Fig. 3.3

b) *Invarianți*. Rezultanta \vec{R} a unui sistem de forțe concurente, obținută prin construcția grafică denumită *poligonul forțelor*, este un *invariant* față de operațiile elementare de echivalență. Poligonul forțelor extinde regula paralelogramului (fig. 3.3). Fîind dat un sistem de forțe concurente

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, care acționează asupra unui punct material P (fig. 3.3, a), se alege un punct O arbitrar în spațiu în care se aplică un vector \vec{OA}_1 , echipolent cu \vec{F}_1 ; în extremitatea acestuia se aplică un vector $\vec{A_1A_2}$ echipolent cu \vec{F}_2 și așa mai departe.

Rezultanta \vec{R} a sistemului de forțe concurente este dată în mărime, direcție și sens de vectorul \vec{OA}_n care închide poligonul forțelor $OA_1A_2\dots A_n$ (fig. 3.3, b). Sistemul de forțe concurente din fig. 3.3, a este echivalent cu forța unică din fig. 3.3, c.

Vom scrie

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i. \quad (3.1)$$

Modulul rezultantei se obține din relația

$$R^2 = \sum F_i^2 + 2 \sum \sum F_i F_j \cos(\vec{F}_i, \vec{F}_j). \quad (3.2)$$

Proiectînd relația (3.1) pe axe, rezultă proiecțiile rezultantei

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i. \quad (3.3)$$

Cu ajutorul acestor proiecții se poate determina modulul rezultantei și cosinusurile sale directe, folosind formulele

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (3.4)$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \quad (3.5)$$

c) *Echivalența a două sisteme de forțe concurente.* Rezultanta este singurul invariant al unui sistem de forțe concurente. Că urmare ea singură caracterizează un sistem de forțe concurente. Rezultă imediat că fiind date două sisteme de forțe concurente (S) și (S'), condiția ca ele să fie echivalente este să aibă aceeași rezultantă

$$\vec{R} = \vec{R}'. \quad (3.6)$$

§ 3. Echilibrul punctului material liber supus la acțiunea unui sistem de forțe concurente. Să considerăm un punct material liber care se află în repaus față de un triedru de referință inerțial. Să presupunem, apoi, că asupra sa acționează un sistem de forțe concurente. Ne propunem să găsim condiția necesară și suficientă ca sistemul de forțe să fie în echilibru sau, ceea ce este același lucru, ca punctul material să continue să rămână în repaus (poziția punctului material, în sistemul de referință ales, să nu se schimbe cu timpul) după ce sistemul de forțe a fost aplicat punctului material.

Pentru aceasta se vor utiliza două principii și anume: principiul paralelogramului forțelor și principiul inerției.

Principiul paralelogramului forțelor permite să se înlocuiască sistemul de forțe concurente cu o forță unică \vec{R} , rezultanta sistemului.

Conform principiului inerției, dacă asupra punctului material liber nu acționează nici o forță și punctul material se găsește în repaus față de un reper fix, el va continua să rămână în repaus și reciproc.

Pe baza acestor două principii se poate trage concluzia că pentru echilibru este necesar și suficient ca forța unică \vec{R} la care s-a redus sistemul de forțe concurente să fie nulă

$$\vec{R} = 0. \quad (3.7)$$

Pentru că \vec{R} este suma vectorială a forțelor ce alcătuiesc sistemul ($\vec{R} = \sum \vec{F}_i$), rezultă că ecuația vectorială (3.7) mai poate fi scrisă

$$\sum \vec{F}_i = 0. \quad (3.8)$$

Această condiție vectorială este echivalentă cu trei ecuații scalare, obținute prin proiectarea ei pe axele unui triedru ortogonal.

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0. \quad (3.9)$$

În cazul unui sistem de forțe în același plan, problema nu se particularizează dacă se presupune că planul în care acționează forțele este xOy . Atunci $Z_i = 0$ și ultima dintre ecuațiile (3.9) este identic satisfăcută. Rămân atunci două condiții de echilibru

$$\bullet \quad \sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0. \quad (3.10)$$

De asemenea, în cazul unui sistem de forțe avînd același suport, problema nu se particularizează dacă se presupune că suportul comun este axa Ox . Atunci $Y_i = 0$, $Z_i = 0$ și ultimele două ecuații (3.9) sînt identic satisfăcute. Rămîne atunci o singură ecuație scalară de echilibru

$$\sum X_i = 0. \quad (3.11)$$

§ 4. Problemele staticii punctului material liber. Problemele privind echilibrul punctului material liber pot fi împărțite în două categorii:

a) Probleme în care se dau forțele care acționează asupra punctului material și se cere să se determine poziția lui de echilibru.

b) Probleme în care se dă poziția de echilibru a punctului și se cer forțele care trebuie să acționeze asupra lui pentru a-l menține în această poziție.

În prima categorie de probleme, necunoscutele sînt coordonatele punctului, în număr de trei în spațiu sau două în plan. Deoarece pentru determinarea lor se dispune de un număr de trei ecuații scalare în spațiu sau de două ecuații scalare în plan, rezultă că în general problemele din prima categorie pot fi rezolvate. Bineînțeles, nu este exclusă posibilitatea ca sistemul de ecuații de echilibru să fie nedeterminat sau imposibil. În aceste cazuri există respectiv o infinitate de poziții de echilibru posibile sau nu există nici una.

În a doua categorie de probleme, necunoscutele sînt mărimile și direcțiile forțelor. Dacă nu se face nici o mențiune asupra forțelor, problemele din această categorie sînt în general nedeterminate, căci există o infinitate de sisteme de forțe care mențin un punct material în repaus. Dacă se impun forțelor anumite condiții, fie în ce privește numărul lor, fie mărimea lor etc. atunci este posibil ca și problemele din această categorie să fie deter-

minate. Pentru aceasta este necesar ca numărul necunoscutelor scalare introduse să nu fie mai mare de trei în spațiu și mai mare de două în cazul forțelor în plan.

Aplicație. 1°. Se consideră într-un plan vertical un punct material de greutate G , legat cu două fire petrecute peste doi scripeți S_1 și S_2 . La extremitățile firelor atârână respectiv greutatea P și Q (fig. 3.4, a).

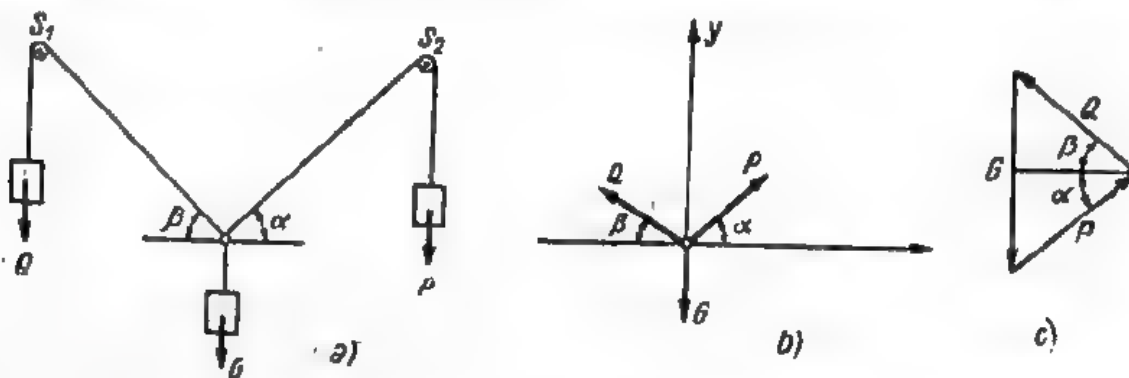


Fig. 3.4

Se cere să se determine poziția de repaus a punctului material.

Fiind o problemă de punct material liber supus la forțe aflate în același plan, poziția de repaus va fi definită de doi parametri. Alegem ca parametri unghiurile α și β pe care firele le fac cu orizontala. Asupra punctului acționează forțele arătate în fig. 3.4, b. Ecuațiile de echilibru sînt

$$P \cos \alpha - Q \cos \beta = 0, \quad P \sin \alpha + Q \sin \beta - G = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații trigonometrice, obținem

$$\sin \alpha = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2 PG}, \quad \sin \beta = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2 QG}.$$

Pentru ca aceste soluții să aibă sens este necesar și suficient ca

$$-1 \leq \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2 PG} < 1, \quad -1 \leq \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2 QG} < 1.$$

Inegalitățile se mai scriu

$$|G - P| < Q < |P + G|; \quad |G - Q| < P < |G + Q|.$$

Rezultă că între modulele celor trei forțe trebuie să subziste aceleași inegalități ca între laturile unui triunghi. Altfel echilibrul este imposibil și punctul material nu poate rămîne în repaus.

Această ultimă condiție apare evidentă dacă se rezolvă grafic problema, ceea ce revine la construirea unui triunghi cărui a se cunosc lungimile laturilor și direcția uneia dintre ele (fig. 3.4, c).

B. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARE

§ 5. Axioma legăturilor. În cazul unui punct material supus la legături, condiția de echilibru ($R = 0$) scrisă pentru forțele efectiv aplicate (date) nu mai este necesară. Într-adevăr, experiența arată de exemplu că un punct

material greu poate rămâne în echilibru pe un cerc situat într-un plan vertical în punctul A cel mai de jos sau, dacă cercul este aspru (curbă cu frecări) într-un punct M (fig. 3.5, a). Cum asupra punctului acționează forța efectiv aplicată $\bar{G} \neq 0$ și totuși punctul stă în echilibru, rezultă că nu mai este necesară condiția $\bar{Q}=0$, valabilă la punctul material liber.

Pentru a găsi condiția necesară și suficientă ca un punct material supus la legături să se găsească în echilibru, vom înlătura legătura (în exemplul de mai sus, cercul). Punctul material devine astfel liber. Dacă se admite că asupra lui acționează o forță egală și opusă rezultantei forțelor efectiv aplicate, punctul material continuă să rămână în repaus și după suprimarea legăturii. Această forță înlocuiește legătura și poartă numele de *forță de legătură* sau *reacțiune*. Notînd-o cu \bar{R} , condiția necesară și suficientă de echilibru devine

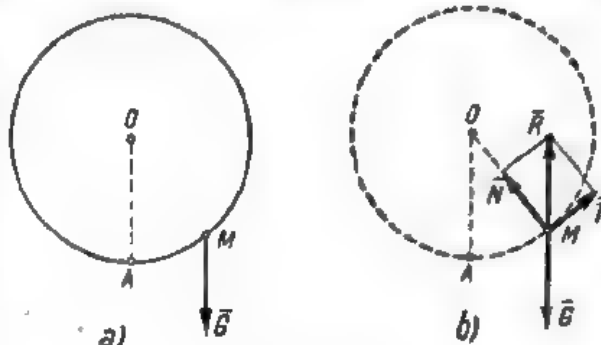


Fig. 3.5

$$\bar{R} + \bar{Q} = 0. \quad (3.12)$$

Această înlocuire a unei legături cu o forță este cunoscută sub numele de *axioma legăturilor* (*axioma eliberării*, *principiul forțelor de legătură*) și se enunță astfel:

O legătură poate fi înlocuită cu o forță denumită forță de legătură sau reacțiune. Sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forței de legătură, punctul material poate fi considerat liber și poate fi tratat ca atare.

O problemă de echilibru a punctului material supus la legături comportă în general determinarea a două categorii de necunoscute: unele privind poziția punctului, celelalte privind forța de legătură. Pentru rezolvarea problemei se aplică axioma legăturilor și apoi se scriu ecuațiile de echilibru care rezultă din proiectarea pe axe a condiției (3.12), adică

$$X + R_x = 0, \quad Y + R_y = 0, \quad Z + R_z = 0 \quad (3.13)$$

în cazul unui sistem de forțe în spațiu și

$$X + R_x = 0, \quad Y + R_y = 0 \quad (3.14)$$

în cazul unui sistem de forțe în plan.

Dacă asupra forței de legătură \bar{R} nu se pune nici o condiție, problema rămâne nedeterminată pentru că în afara proiecțiilor forței de legătură, al căror număr este egal cu acela al ecuațiilor de echilibru, mai intervin ca necunoscute parametrii care definesc poziția de echilibru, în număr de doi în cazul unei suprafețe și de unul în cazul unei curbe.

Numai în cazul cînd punctul material este obligat să rămână într-o anumită poziție fixă în spațiu, problema este determinată, singurele necu-

noscute fiind atunci proiecțiile R_x , R_y , R_z ale forței de legătură pe axe. Valorile lor se obțin imediat

$$R_x = -X, \quad R_y = -Y, \quad R_z = -Z \quad \text{sau} \quad (3.15)$$

$$R_x = -X, \quad R_y = -Y \quad (3.16)$$

după cum este cazul unui sistem de forțe în spațiu sau în plan.

Experiența arată că un punct material obligat să rămână pe o curbă sau pe o suprafață nu poate fi în echilibru în orice poziție. Rezultă atunci că forța de legătură \bar{R} nu poate fi arbitrară, căci dacă ar fi arbitrară, ea ar putea echilibra rezultanta \bar{Q} a forțelor efectiv aplicate punctului, oricare ar fi poziția acestuia pe curbă sau pe suprafață.

Pentru a cerceta care sînt restricțiile ce se pun practic forței de legătură, s-o descompunem după o direcție normală și o direcție tangențială la legătură. Să notăm cu \bar{N} și \bar{T} cele două componente astfel obținute (fig. 3.5, b). Există evident relația

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T}. \quad (3.17)$$

Rolul componentei \bar{N} este de a împiedica punctul material să părăsească legătura. Rolul componentei \bar{T} este de a împiedica punctul material să se deplaseze pe curbă sau pe suprafață; ea poartă numele de *forță de frecare*.

§ 6. Legături ideale. Se înțelege prin legături ideale (fără frecări sau lucii) legăturile pentru care $\bar{T} = 0$. Asemenea legături nu există în realitate. Există însă curbe și suprafețe la care forța de frecare este destul de mică și într-o primă aproximație poate fi neglijată. În aceste condiții, din (3.17), rezultă

$$\bar{R} = \bar{N}. \quad (3.18)$$

În cazul cînd legătura este o suprafață lucie, reacțiunea are direcția normală la suprafață în punctul considerat, iar în cazul cînd legătura este o curbă lucie, reacțiunea are o direcție oarecare în planul normal.

Cum rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra unui punct material supus la legături trebuie, pentru echilibru, să fie egală și direct opusă cu reacțiunea dezvoltată de legătură, rezultă următoarele condiții necesare și suficiente pentru ca un punct material să rămână în echilibru pe o curbă sau suprafață lucie:

Dacă un punct material este obligat să rămână pe o suprafață lucie, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate punctului să fie dirijată după normala la suprafață în punctul considerat.

Dacă un punct material este obligat să rămână pe o curbă lucie, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate să aibă suportul în planul normal la curbă în punctul considerat.

Să analizăm posibilitatea de rezolvare a problemelor de echilibru a punctului material supus la asemenea legături.

Dacă aplicăm axioma legăturilor, dispunem de trei ecuații scalare, la fel ca în cazul punctului material liber.

În cazul punctului material supus la legături, necunoscutele sînt de două feluri:

- a) necunoscute care privesc poziția de echilibru;
- b) necunoscute care privesc forța de legătură.

În cazul unui punct material obligat să rămînă pe o suprafață, poziția de echilibru depinde de doi parametri: coordonatele curbilinii u și v , în funcție de care se exprimă coordonatele x , y și z sub forma

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v). \quad (3.19)$$

Dacă se cunoaște poziția de echilibru, normala la suprafață este în general determinată, deci se cunoaște punctul de aplicație și direcția reacțiunii. Pentru a cunoaște complet reacțiunea este nevoie de scalarul ei (o necunoscută). În total rezolvarea unei probleme de echilibru a unui punct material silit să rămînă pe o suprafață lucie comportă determinarea a trei necunoscute: două coordonate curbilinii și scalarul reacțiunii, deci numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații de echilibru care se pot scrie. Problema în general este deci posibil de rezolvat. Se poate întîmpla, în cazuri particulare, ca sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute astfel obținut să fie nedeterminat sau imposibil. În aceste cazuri există o infinitate de poziții de echilibru sau nu există nici o asemenea poziție.

În cazul unui punct material obligat să rămînă pe o curbă lucie, poziția de echilibru depinde de un singur parametru, în funcție de care se pot exprima coordonatele punctului sub forma

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \quad (3.20)$$

Dacă se cunoaște poziția de echilibru a punctului, planul normal în care trebuie să se găsească reacțiunea este bine determinat. Cunoașterea reacțiunii revine atunci la cunoașterea proiecțiilor ei pe două direcții din planul normal, deci comportă două necunoscute scalare. În total deci rezolvarea unei probleme de echilibru a unui punct material silit să rămînă pe o curbă lucie comportă trei necunoscute, adică un număr egal cu acela al ecuațiilor de care se dispune. Deci în general o asemenea problemă este posibil de rezolvat. În cazuri particulare, cînd sistemul de ecuații este nedeterminat sau imposibil, sau există o infinitate de poziții de echilibru, sau nu există nici o asemenea poziție.

§ 7. Ecuațiile de echilibru în cazul unei suprafețe. Dacă ecuația suprafeței este dată sub formă implicită

$$\varphi(x, y, z)=0, \quad (3.21)$$

se știe că un vector normal la suprafață este gradientul funcției $\varphi(x, y, z)$. Reacțiunea \bar{R} în cazul unei suprafețe lucii fiind normală, poate fi scrisă sub forma

$$\bar{R}=\lambda \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.22)$$

Atunci, dacă \bar{Q} este rezultanta forțelor efectiv aplicate, condiția de echilibru (3.12) se scrie

$$\bar{Q} + \lambda \text{grad } \varphi = 0. \quad (3.23)$$

La această ecuație trebuie adăugată ecuația (3.21). Proiectând pe cele trei axe ecuația vectorială (3.23) obținem

$$X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3.24)$$

Dacă ecuația suprafeței este dată sub formă explicită

$$z = z(x, y), \quad (3.25)$$

atunci ecuațiile (3.24) pot fi scrise astfel:

$$X + \lambda \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad Z - \lambda = 0. \quad (3.26)$$

În sfârșit, dacă suprafața este dată prin ecuațiile parametrice

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (3.27)$$

parametrii directori ai normalei la suprafață sînt determinanții funcționali

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \quad (3.28)$$

și ecuațiile de echilibru devin

$$X + \lambda \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = 0, \quad Y + \lambda \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = 0, \quad Z + \lambda \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0. \quad (3.29)$$

Dacă într-o problemă interesează numai poziția de echilibru a punctului, ea se poate obține scriind ecuațiile care se obțin prin eliminarea parametrului λ între ecuațiile (3.24) respectiv (3.26) sau (3.29). Se obține

$$\frac{X}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \quad (3.30)$$

$$\frac{X}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -1, \quad (3.31)$$

$$\frac{X}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}} = \frac{Y}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}} = \frac{Z}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}. \quad (3.32)$$

Aplicații. 2^o. Să se determine modulul forței orizontale F necesare pentru a menține în repaus un punct material de greutate G pe un plan luciu, înclinat sub un unghi α față de orizontală. Să se determine de asemenea mărimea reacțiunii și poziția de repaus (fig. 3.6).

Eliberînd punctul material de legături vom introduce și reacțiunea normală N (fig. 3.6, b). Alegînd ca axe de coordonate linia de cea mai mare pantă a planului și normala la plan, ecuațiile de echilibru se scriu

$$-F \cos \alpha + G \sin \alpha = 0, \quad N - F \sin \alpha - G \cos \alpha = 0,$$

din care, pentru necunoscutele F și N rezultă valorile

$$F = G \operatorname{tg} \alpha, \quad N = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Poziția de echilibru este nedeterminată căci coordonatele punctului nu intervin în ecuațiile de echilibru. Rezultă atunci că dacă $F = G \operatorname{tg} \alpha$, punctul material stă în repaus oriunde ar fi el așezat pe planul înclinat.

3°. Să se găsească poziția de repaus a unui punct material greu pe o sferă lucie de rază R .

Alegând un sistem de axe cu originea în centrul sferei și axa Oz verticală și ascendentă, ecuația sferei se va scrie $\varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Greutatea fiind verticală avem $\bar{R} - \bar{G} = -G\bar{e}$. Rezultă

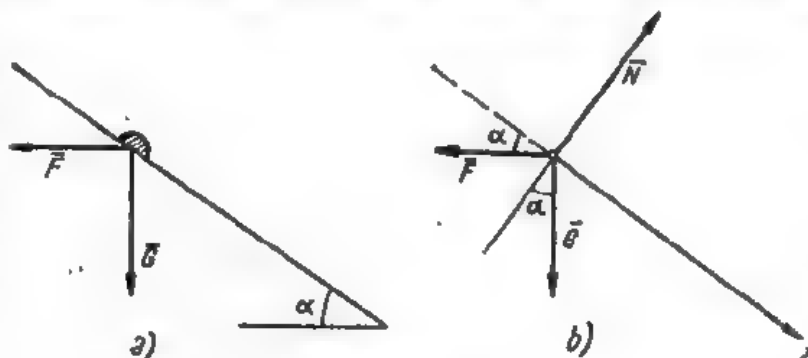


Fig. 3.6

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z,$$

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -G.$$

Condițiile de echilibru (3.30) devin

$$\frac{0}{2x} = \frac{0}{2y} = \frac{-G}{2z}.$$

De aci deducem $x=0$, $y=0$. Introducând aceste valori în ecuația sferei rezultă $z^2 - R^2 = 0$ de unde $z = \pm R$. Deci există două poziții de repaus în punctele $A(0, 0, R)$ și $B(0, 0, -R)$. Se poate verifica ușor că aceste două poziții corespund respectiv punctului celui mai înalt și punctului celui mai de jos de pe sferă.

4°. Să se găsească poziția de repaus a unui punct material de greutate G , obligat să rămână pe o sferă lucie de rază R dacă este legat cu un resort ideal de constantă elastică h de punctul cel mai înalt al sferei.

Polosind același sistem de axe ca în problema precedentă și notînd cu $A(0, 0, R)$ punctul cel mai înalt al sferei și cu $P(x, y, z)$ poziția de repaus a punctului, rezultă pentru forța elastică, respectiv pentru componentele ei, expresiile

$$\bar{F} = -h\bar{AP},$$

$$F_x = -hx, \quad F_y = -hy, \quad F_z = -h(z - R).$$

Atunci proiecțiile rezultantelor \bar{Q} vor fi

$$X = -hx, \quad Y = -hy, \quad Z = -G - h(z - R).$$

Condițiile de echilibru (3.30) devin

$$\frac{-hx}{2x} = \frac{-hy}{2y} = \frac{-G - h(z - R)}{2z}.$$

Din aceste ecuații deducem, în cazul $G \neq hR$: $x=0$, $y=0$, $z = \pm R$, iar în cazul $G = hR$: $x = \text{arbitrar}$, $y = \text{arbitrar}$, $z = \text{arbitrar}$. Există deci fie două poziții de repaus, ca în cazul problemei precedente, fie o infinitate de asemenea poziții, punctul material găsindu-se în repaus în oricare punct al sferei.

§ 8. Ecuațiile de echilibru în cazul unei curbe. Să presupunem că se cunosc ecuațiile implicite ale curbei:

$$\varphi(x, y, z)=0; \psi(x, y, z)=0. \quad (3.33)$$

Se știe că planul normal la curbă conține normalele la cele două suprafețe $\varphi=0$ și $\psi=0$, deci conține vectorii grad φ și grad ψ . Reacțiunea în cazul unei curbe lucii fiind un vector cuprins în planul normal, se poate pune sub forma

$$\bar{R}=\lambda \text{ grad } \varphi+\mu \text{ grad } \psi. \quad (3.34)$$

Atunci, dacă se notează cu \bar{Q} rezultanta forțelor efectiv aplicate, condiția de echilibru (3.12) se scrie.

$$\bar{Q}+\lambda \text{ grad } \varphi+\mu \text{ grad } \psi=0. \quad (3.35)$$

Proiectând pe axe ecuația (3.35) obținem

$$\left. \begin{aligned} X+\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} &=0 \\ Y+\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} &=0 \\ Z+\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} &=0. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Dacă ecuațiile curbei sînt date sub forma

$$z=f(x, y), \quad z=g(x, y), \quad (3.37)$$

se deduc ușor ecuațiile de echilibru observînd că în acest caz se poate scrie

$$\varphi(x, y, z)=f(x, y)-z=0,$$

$$\psi(x, y, z)=g(x, y)-z=0,$$

deci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=-1,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}=-1.$$

Atunci ecuațiile de echilibru (3.36) devin

$$\left. \begin{aligned} X+\lambda \frac{\partial f}{\partial x}+\mu \frac{\partial g}{\partial x} &=0 \\ Y+\lambda \frac{\partial f}{\partial y}+\mu \frac{\partial g}{\partial y} &=0 \\ Z-\lambda-\mu &=0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

La aceste ecuații trebuie adăugate relațiile (3.33).

În cazul cînd curba este dată prin ecuațiile parametrice

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (3.39)$$

reacțiunea \vec{R} trebuind să fie cuprinsă în planul normal, este perpendiculară pe tangentă, ai cărei parametri directori sînt x' , y' și z' și deci componentele ei trebuie să îndeplinească condiția

$$R_x x' + R_y y' + R_z z' = 0. \quad (3.40)$$

Această condiție este satisfăcută identic dacă se ia

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \mu z' - \nu y' \\ R_y &= \nu x' - \lambda z' \\ R_z &= \lambda y' - \mu x' \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

unde λ , μ , ν sînt trei parametri arbitrari. Ecuațiile de echilibru devin

$$\left. \begin{aligned} X + \mu z' - \nu y' &= 0 \\ Y + \nu x' - \lambda z' &= 0 \\ Z + \lambda y' - \mu x' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Dacă, într-o problemă interesează numai poziția de echilibru, aceasta se poate obține eliminînd parametrii λ și μ între ecuațiile (3.36) sau (3.38) și parametrii λ , μ și ν între ecuațiile (3.42). Se obțin respectiv condițiile

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ Z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.44)$$

$$X x' + Y y' + Z z' = 0. \quad (3.45)$$

Aplicații. 5°. Să se determine poziția de repaus a unui punct material de greutate G , obligat să rămînă pe un cerc de rază R , situat într-un plan vertical, dacă asupra punctului mai acționează și o forță F paralelă cu diametrul orizontal al cercului.

Rezolvare. Eliberăm punctul material de legătura sa cu cercul și introducem reacțiunea normală N (fig. 3.7). Proiectînd pe tangentă și pe normala la cerc, obținem ecuațiile de echilibru

$$F \sin \alpha - G \cos \alpha = 0, \quad N - F \cos \alpha - G \sin \alpha = 0,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G}{F}, \quad N = \sqrt{F^2 + G^2}.$$

Se poate observa că există două poziții de echilibru distincte, diametral opuse A și B .

6°. Un punct material de greutate neglijabilă, obligat să rămînă pe un semicerc de rază R , este legat cu două resorturi, de constante elastice k , de extremitățile diametrului AB (fig. 3.8). Se cere să se determine poziția de repaus.

Rezolvare. Eliberăm punctul material de legătura cu cercul și introducem reacțiunea normală N . Ecuațiile de proiecție pe tangenta și pe normala în M la cerc sînt (fig. 3.8)

$$-F_1 \sin \frac{\alpha}{2} + F_2 \cos \frac{\alpha}{2} = 0, \quad N - F_1 \cos \frac{\alpha}{2} - F_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Dar F_1 și F_2 fiind forțe elastice, sînt proporționale respectiv cu lungimile MA și MB

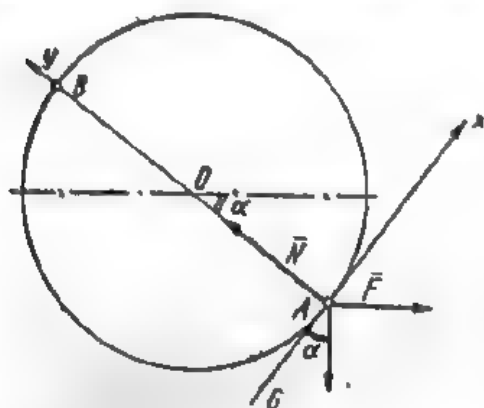


Fig. 3.7

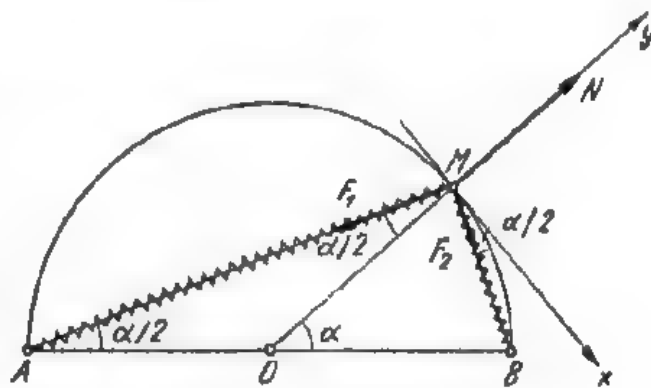


Fig. 3.8

$$F_1 = k \cdot MA = k \cdot 2R \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$F_2 = k \cdot MB = k \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Introducându-le în ecuațiile de echilibru, se observă că prima devine o identitate, iar din a doua se deduce $N = 2kR$. Deci punctul material stă în repaus în orice poziție pe cerc, iar reacțiunea are o valoare constantă.

7°. Să se determine poziția de repaus a unui punct material greu pe elicea de ecuații parametrice

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = a \cdot \sin t, \quad z = bt \quad (\text{axa } Oz \text{ verticală ascendentă}).$$

Rezolvare. Observînd că greutatea G are drept proiecții pe axe: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -G$ și deducînd din ecuațiile parametrice: $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$, $z' = b$, ecuația de echilibru (3.45) devine

$$-Gb = 0,$$

ecuație imposibilă. Deci punctul material greu nu poate sta în repaus în nici unul din punctele elicei.

§ 9. Cazul legăturilor unilaterale. În paragrafele dinainte s-a presupus că punctul material nu poate părăsi legătura oricare ar fi forțele efectiv aplicate asupra lui. O astfel de legătură se numește *legătură bilaterală*. Există însă legături care pot fi părăsite în anumite condiții; ele se numesc *legături unilaterale*. Ca exemplu cităm un punct material legat cu un fir flexibil și inextensibil de un punct fix din spațiu. Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra firului include firul, punctul material rămîne pe o sferă cu centrul în punctul fix și cu raza egală cu lungimea firului. Dacă firul nu este întins, punctul material poate părăsi sfera către interior.

O legătură unilaterală se exprimă, după caz, printr-o inegalitate.

În exemplul dinainte, dacă punctul fix este în originea unui sistem de axe $Oxyz$, iar lungimea firului este l , legătura este caracterizată prin

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0.$$

O problemă de echilibru a punctului material supus la o legătură unilaterală se rezolvă în modul următor:

a) Se determină pozițiile de echilibru ale punctului ca și când legătura ar fi bilaterală, urmînd procedeul arătat.

b) Se analizează în fiecare dintre aceste poziții sensul rezultantei \bar{R} . Dacă acest sens este astfel încît asigură legătura, poziția de echilibru este posibilă. Dacă sensul rezultantei \bar{R} nu asigură legătura, poziția de echilibru nu corespunde și trebuie înlăturată.

Astfel, în exemplul dat, rezultanta \bar{R} trebuie să aibă sensul către exteriorul sferei de rază l . Putem da o expresie generală a condiției ca o poziție de echilibru să fie acceptabilă în cazul unei legături unilaterale.

Să presupunem că legătura unilaterală se exprimă prin condiția

$$f(x, y, z) \geq 0. \quad (3.46)$$

Este întotdeauna posibil să se exprime o legătură unilaterală sub forma (3.46) deoarece, dacă inegalitatea ar fi de sens contrar, ea poate fi adusă la forma (3.46) prin înmulțire cu -1 .

Se știe că vectorul grad f are direcția normală la suprafață și este dirijat în sensul în care crește funcția $f(x, y, z)$. Este ușor de verificat că, dată fiind condiția (3.46), pentru ca echilibrul să fie asigurat în cazul unei legături unilaterale, este necesar ca rezultanta \bar{R} a forțelor efectiv aplicate punctului material să fie de sens opus sensului gradientului adică

$$\bar{R} \cdot \text{grad } f < 0. \quad (3.47)$$

În funcție de componentele celor doi vectori, condiția (3.47) se scrie

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} < 0. \quad (3.48)$$

A p l i c a ț i e. 8°. Se consideră un punct material greu, legat cu un fir flexibil și inextensibil de lungime l de un punct fix din spațiu. Se cere să se determine poziția de echilibru.

R e z o l v a r e. Presupunînd un sistem de axe cu originea în punctul fix, avînd axa Oz verticală și ascendentă, ecuația sferei pe care trebuie să rămînă punctul material se scrie $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$. Pentru că legătura este unilaterală (firul putîndu-se slăbi) și pentru că legătura permite ca punctul material să ocupe numai interiorul sferei, unde distanța de la origine la un punct oarecare este mai mică decît l , condiția impusă de legătură se scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2.$$

Putem aduce această condiție la forma (3.46) scriînd-o

$$f(x, y, z) = l^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0.$$

Rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului se reduce în cazul nostru la greutatea proprie \bar{G} ale cărei componente pe axe sînt:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-G.$$

Presupunind deocamdată legătura bilaterală, condiția de echilibru

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

devine

$$\frac{0}{-2x} = \frac{0}{-2y} = \frac{-G}{-2z}.$$

Rezultă $x=0$ și $y=0$. Ținând seama de ecuația suprafeței, se deduce $z=\pm l$. Corespund deci două poziții de echilibru $A(0, 0, l)$ și $B(0, 0, -l)$. Să analizăm care dintre ele convine cazului legăturii unilaterale. Condiția (3.48) devine

$$0 \cdot (-2x) + 0 \cdot (-2y) + (-G) \cdot (-2z) < 0,$$

sau

$$Gz < 0.$$

Ea este satisfăcută numai de punctul B , singura poziție de echilibru posibilă.

C. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

§ 10. Frecarea de alunecare. Coeficient de frecare de alunecare. În capitolul precedent s-a presupus că legăturile sînt ideale. S-a neglijat în felul acesta componenta tangențială a forței de legătură, denumită *forță de frecare de alunecare*. Sînt cazuri cînd această neglijare nu se poate face. Aceasta se întîmplă în cazul legăturilor aspre, rugoase. Experiența arată că pe o suprafață sau pe o curbă aspră un punct material nu poate sta în echilibru în orice poziție. De aci se deduce că forța de frecare \vec{T} satisface anumite condiții.

S-au imaginat numeroase experiențe care să pună în evidență aceste condiții. În cele ce urmează se vor arăta rezultatele experiențelor făcute de Coulomb.

O asemenea experiență redusă la forma cea mai simplă se realizează astfel: se consideră un corp de dimensiuni neglijabile așezat pe un plan orizontal aspru (fig. 3.9). Asupra sa acționează la început greutatea G și reacțiunea normală \vec{N} . Dacă planul ar fi luciu, corpul ar trebui să alunece

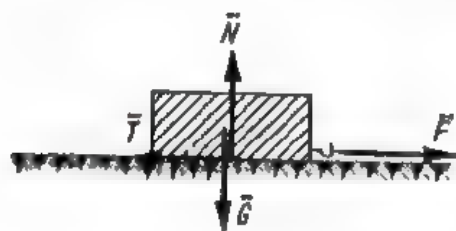


Fig. 3.9

în momentul în care i s-ar aplica cea mai mică forță orizontală \vec{F} . În realitate însă corpul nu alunecă decît în momentul cînd forța \vec{F} atinge o anumită valoare. Aceasta dovedește că asupra corpului mai acționează o forță care se opune alunecării, care este îndreptată în sens contrar vitezei relative și care echilibrează forța \vec{F} . Aceasta este *forța de frecare de alunecare*, \vec{T} . Faptul că totuși echilibrul se strică atunci cînd forța F depășește o anumită intensitate, ne arată că forța de frecare \vec{T} nu poate depăși o anumită valoare T_{max} .

Experiențele lui Coulomb au arătat că: 1. valoarea maximă a forței de frecare nu depinde de viteza relativă a corpului, de mărimea suprafeței de contact dintre corp și plan, ci 2. numai de natura corpurilor și de starea suprafețelor în contact, precum și 3. de mărimea reacțiunii normale la suprafața de contact, \bar{N} .

Toate aceste rezultate pot fi cuprinse în formula

$$|\bar{T}_{max}| = \mu |\bar{N}|. \quad (3.49)$$

Coeficientul μ se numește *coeficient de frecare* la alunecare; el nu are dimensiuni și depinde de natura corpurilor și a suprafețelor în contact.

În tabela 5 sînt date valorile coeficientului de frecare μ pentru cîteva corpuri întîlnite în tehnică.

Tabela 5

Valorile coeficientului de frecare μ

Natura corpurilor	Starea suprafețelor	Coeficientul μ	Observații
Oțel pe oțel	unse cu sen	0,07	coeficient de aderență (la pornire)
	unse cu ulei	0,15	
	uscate	0,22—0,25	
	puțin unse	0,20	
Bronz pe bronz	puțin unse	0,21	coeficient de aderență
Bronz pe fontă	puțin unse	0,15	
Fontă pe fontă sau bronz	puțin unse	0,31	
	cu apă	0,014	
Oțel pe gheață	—	0,027	coeficient de aderență
	—	0,48	
Stejar pe stejar (uscat)	în lungul fibrelor	0,34	
	normal pe fibre	0,27	
Curea de piele pe tambur de stejar	uscate	0,47	depinde de viteză
	puțin unse	0,28	
Curea de piele pe fontă	puțin unse	0,36	
	cu apă		

Recapitulînd proprietățile forței de frecare de alunecare conchidem:

- Direcția ei este tangentă la suprafață sau la curbă.
- Sensul ei este invers tendinței de alunecare.
- Pentru echilibru este necesar ca modulul forței de frecare să rămînă inferior valorii date de (3.49), adică.

$$|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}|. \quad (3.50)$$

Natura forțelor de frecare. Teoria lui Coulomb explică deci apariția forțelor de frecare — îndeosebi — prin neregularitățile pe care le prezintă suprafețele corpurilor în contact. Cînd două corpuri au o deplasare relativă, unul în raport cu celălalt, aceste asperități sînt strivite; deci forța de frecare ar fi forța care se opune strivirii neregularităților. Ar rezulta, în virtutea acestei teorii, că forța de frecare dintre două corpuri este cu atît mai mică, cu cît suprafețele lor de contact sînt prelucrate mai fin.

Experiențele au arătat însă că această concluzie nu este adevărată decât între anumite limite. S-a constatat astfel că, dacă suprafețele a două corpuri sînt foarte fin polizate, forța de frecare poate crește foarte mult. Astfel, două *plăci de control*¹⁾, așezate una peste alta, dau naștere la forțe de frecare foarte mari, deși asperitățile lor nu întrec 1/2 000 mm. Acest fenomen se explică prin coeziunea dintre moleculele situate pe suprafața unui corp și cele situate pe suprafața celui alt corp. Se știe că forțele de coeziune se exercită atunci cînd distanța dintre molecule este foarte mică (1/1 000 000 mm), ceea ce se întîmplă cu multe molecule în cazul cînd cele două suprafețe sînt foarte fin polizate.

§ 11. Critica legilor lui Coulomb. Legile lui Coulomb și în special independența coeficientului de frecare μ de mărimea reacțiunii normale și de viteza relativă a celor două corpuri care alunecă unul față de celălalt au fost criticate. Totuși ele rămîn valabile în cadrul valorilor pe care le-a experimentat Coulomb, însă ieșind din acest cadru, legile nu se mai verifică.

Astfel, s-a arătat că pentru *valori foarte mari ale reacțiunii normale* N coeficientul de frecare nu mai este constant ci crește (foarte lent) cu N .

De asemenea, coeficientul de frecare variază cu *viteza*. Dăm în tabela 6 exemple de valori, în cazul oțel pe oțel, după Galton:

Tabela 6

Coeficientul de frecare pentru oțel pe oțel, cînd variază viteza.

v [km/h]	0	10,93	21,8	43,5	65,8	87,6	96,48
μ	0,242	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038	0,027

Fenomenul își găsește aplicație în frînarea vehiculelor. Astfel, cînd roțile unui vehicul care circulă cu mare viteză sînt blocate cu ajutorul saboților și ele patinează, coeficientul de frecare la alunecare este mic și vehiculul parcurge pînă la oprire o distanță mare. Dacă însă roțile nu sînt complet blocate, ele rostogolindu-se și alunecînd în același timp, dar cu o viteză mai redusă, coeficientul de frecare este mai mare și oprirea vehiculului se face pe o distanță mai mică. Se ajunge astfel la faptul surprinzător că un vehicul se oprește mai ușor cînd se frînează mai puțin.

Examinînd tabela 6, se constată că coeficientul de frecare μ scade sensibil în special între valoarea $v=0$ și $v=10$ km/h. Coeficientul de frecare corespunzător cazului $v=0$ se notează cu μ_0 și poartă numele de *coeficient de aderență*.

Se constată de asemenea că frecarea mai depinde de *temperatura* corpurilor în contact (scăzînd cu creșterea temperaturii), de *timpul* cît au stat corpurile în contact etc.

¹⁾ Plăci lustruite foarte fin, folosite în metrologie la verificarea aparatelor de măsură (cale).

§ 12. Problemele de echilibru cu frecare ale unui punct material. Rezultă din cele de mai înainte că, față de cazul legăturilor ideale, într-o problemă de echilibru cu frecare intervine în plus o forță \vec{T} care satisface unor anumite condiții arătate în paragraful precedent. Vom analiza pe rând cazul curbelor și cazul suprafețelor.

a) În cazul unei curbe aspre determinarea forței \vec{T} comportă cunoașterea unei singure necunoscute scalare. Într-adevăr punctul de aplicație fiind presupus cunoscut, direcția forței este bine determinată, căci la o curbă, într-un punct, se poate duce în general o tangentă unică. Pentru completa determinare a forței este necesar să se cunoscă numai scalarul T al forței \vec{T} . Această necunoscută trebuie să satisfacă inegalitatea (3.50) sau, în cazul limită de echilibru, egalitatea

$$|\vec{T}| = \mu |\vec{N}|.$$

În acest din urmă caz, deci, pentru determinarea necunoscutei scalare T se dispune de o ecuație; problema este în general posibilă.

Pozițiile de echilibru limită ale unui punct material pe o curbă aspră sînt în general bine determinate.

Dacă însă interesează toate pozițiile de echilibru ale unui punct material pe o curbă aspră, acestea sînt nedeterminate, deoarece se introduce o necunoscută scalară în plus (T) și o inegalitate ($|\vec{T}| \leq \mu |\vec{N}|$). Sistemul de ecuații admite o simplă infinitate de soluții, deci pe o curbă aspră, un punct material poate sta în echilibru în toate punctele unui anumit arc al ei.

b) În cazul unei suprafețe aspre determinarea forței de frecare comportă cunoașterea a două necunoscute scalare. Într-adevăr punctul de aplicație P al ei fiind presupus cunoscut, suportul trebuie să fie conținut în planul tangent la suprafață în acel punct. În planul tangent însă, direcția forței \vec{T} este nedeterminată. Pentru a determina forța \vec{T} atît ca direcție, cît și ca valoare, este necesar să se cunoască proiecțiile ei pe două direcții din planul tangent. Să presupunem două direcții ortogonale $P\xi$ și $P\eta$ și să notăm cu T_ξ și T_η cele două proiecții necunoscute. În situație de echilibru condiția (3.29) se scrie în cazul de față

$$\sqrt{T_\xi^2 + T_\eta^2} \leq \mu |\vec{N}|.$$

Analizînd această condiție rezultă că în cazul unei suprafețe aspre problema este nedeterminată, atît pentru pozițiile de echilibru limită, cît și pentru pozițiile de echilibru în general.

Pentru aflarea pozițiilor de echilibru limită se dispune de o singură ecuație cu două necunoscute T_ξ și T_η . Sistemul admite o simplă infinitate de soluții. Pe o suprafață aspră există deci, în general, o infinitate de poziții de echilibru limită așezate pe o curbă.

Pentru aflarea celorlalte poziții de echilibru se dispune de o inegalitate. Sistemul de ecuații de echilibru are, în acest caz, o dublă infinitate de soluții. Pe o suprafață aspră un punct material poate fi în echilibru în toate punctele unei anumite regiuni.

Aplicații. 9°. Să se găsească pozițiile de echilibru limită ale unui punct material greut pe un cerc situat într-un plan vertical, cunoscând coeficientul de frecare μ între punctul material și cerc.

Rezolvare. Se reprezintă forțele \vec{G} , \vec{N} și \vec{T} care acționează asupra punctului (fig. 3.10, a). Notând $\alpha = \angle AOy$ rezultă ecuațiile de proiecție pe tangenta și normala la cerc:

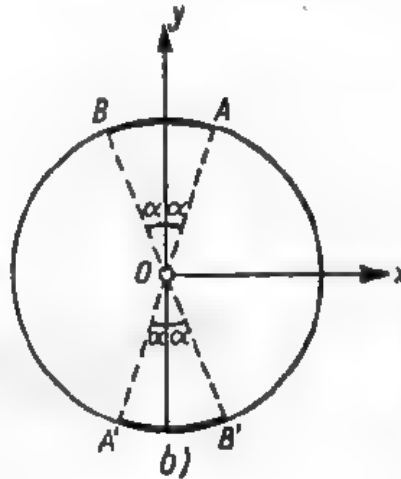
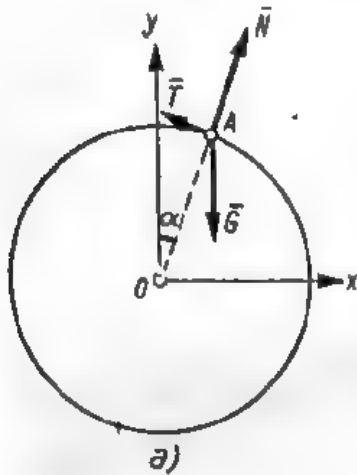


Fig. 3.10

$$-T + G \sin \alpha = 0; \quad N - G \cos \alpha = 0$$

și condiția $T = \mu N$.

Rezultă imediat $\tan \alpha = \mu$;

$$N = \frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}}; \quad T = \frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Există patru poziții limită de echilibru A, B, A' și B' arătate în fig. 3.10, b. Punctul material se găsește în echilibru pe arcele de cerc AB și A'B' care au fost îngroșate.

10°. Un punct material de greutate \vec{G} , acționat de o forță orizontală \vec{F} se află în repaus pe un plan aspru (coeficient de frecare μ), înclinat sub un unghi α

față de orizontală. Se cere să se determine între ce limite trebuie să varieze modulul forței F pentru ca punctul material să rămână în repaus.

Rezolvare. Eliberând punctul material de legătura cu planul înclinat, introducem reacțiunea normală N și forța de frecare \vec{T} . Sensul forței \vec{T} din fig. 3.11 corespunde cazului când punctul material tinde să alunece pe linia de cea mai mare pantă a planului, în sens ascendent. Vom ține seama de posibilitatea de alunecare în ambele sensuri folosind inegalitatea (3.50) sub forma $-\mu N \leq T \leq \mu N$. Alegând ca axe linia de cea mai mare pantă și normala la plan, ecuațiile de echilibru și inegalitatea (3.50) se scriu

$$F \cos \alpha - G \sin \alpha - T = 0,$$

$$N - F \sin \alpha - G \cos \alpha = 0, \quad -\mu N \leq T \leq \mu N.$$

Din primele două ecuații deducem

$$T = F \cos \alpha - G \sin \alpha,$$

$$N = F \sin \alpha + G \cos \alpha.$$

Înlocuind în dubla inegalitate, rezultă

$$-\mu(F \sin \alpha + G \cos \alpha) \leq F \cos \alpha - G \sin \alpha \leq$$

$$\mu(F \sin \alpha + G \cos \alpha),$$

din care deducem limitele între care poate varia F pentru ca punctul material să rămână în repaus

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq F \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Limita superioară a fost determinată în ipoteza că diferența $(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$ este pozitivă. În cazul $\cos \alpha - \mu \sin \alpha \leq 0$, respectiv

$$\cotg \alpha \leq \mu \text{ sau } \alpha \geq \arctg \mu,$$

nu există o limită superioară dincolo de care punctul material să alunece în sens ascendent. În acest caz oricât de mare ar fi forța F punctul material rămâne în repaus. Fenomenul poartă numele de *autoblocare*.

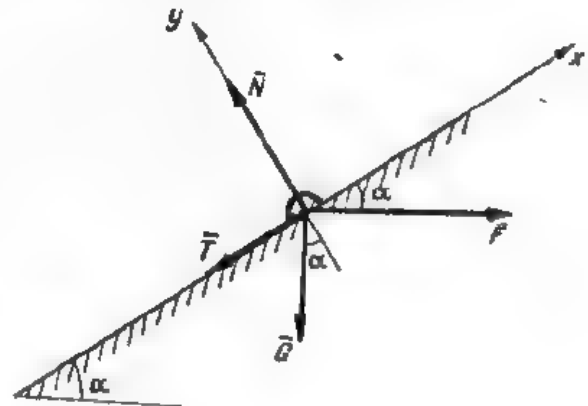


Fig. 3.11

Limita inferioară a scalarului forței F se anulează pentru cazul când diferența ($\sin \alpha - \mu \cos \alpha$) se anulează. În cazul când $\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0$, respectiv

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu \text{ sau } \alpha \leq \arctg \mu,$$

scalarul forței F este negativ sau nul, ceea ce arată că în absența forței F punctul material continuă să rămână în repaus, deși asupra lui acționează greutatea G . Fenomenul poartă numele de *autofixare*.

§ 13. **Considerații geometrice. Unghi de frecare. Conuri de frecare.** Să considerăm exemplul simplu al unui punct material greu, așezat pe un plan orizontal aspru. Să admitem că asupra sa acționează forța orizontală \vec{F} și că el se găsește în echilibru (fig. 3.12).

Să notăm cu α unghiul format de reacțiunea totală \vec{R} cu normala la planul orizontal. Se deduce cu ușurință relația

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T}{N}.$$

S-a presupus că există echilibru. Aceasta înseamnă că $T \leq \mu N$. Să considerăm cazul de echilibru limită și să notăm cu φ unghiul format de reacțiunea \vec{R} cu normala la plan în acest caz. Rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{\max}}{N}.$$

Cum însă $T_{\max} = \mu N$ rezultă încă

$$\operatorname{tg} \varphi = \mu. \quad (3.51)$$

Unghiul φ astfel definit poartă numele de *unghi de frecare*. Importanța lui apare din compararea expresiilor $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{tg} \varphi$. Deoarece în cazul echilibrului $T \leq T_{\max}$ rezultă $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi$ sau, fiindcă unghiurile α și φ sînt amîndouă ascuțite

$$\alpha \leq \varphi. \quad (3.52)$$

Cu alte cuvinte, pentru ca un punct material să fie în echilibru pe un plan aspru este necesar ca suportul reacțiunii \vec{R} să facă un unghi $\alpha \leq \varphi$

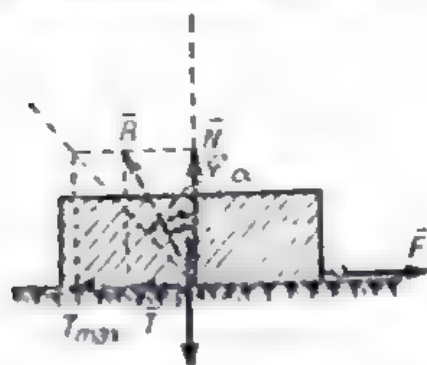


Fig. 3.12

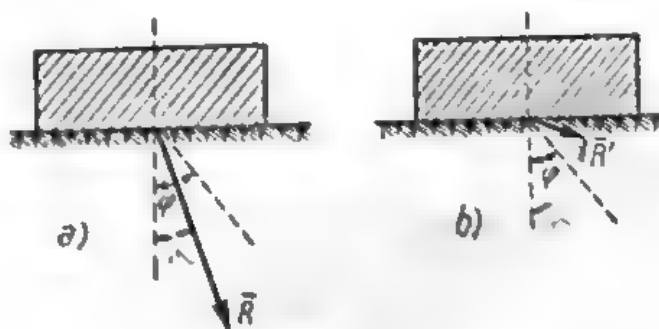


Fig. 3.13

cu normala la plan. Cîm rezultanta forțelor efectiv aplicate (\vec{Q}) este egală și opusă reacțiunii \vec{R} condiția de echilibru se mai poate enunța și sub formă: *suportul rezultantei forțelor efectiv aplicate asupra punctului material trebuie să facă cu normala la plan un unghi mai mic decît unghiul de frecare.*

Interpretarea acestui rezultat este dată în fig. 3.13. Astfel, în fig. 3.13, *a*, corpul este în echilibru pentru că suportul rezultantei \bar{R} face cu normala un unghi mai mic decât φ . Echilibrul se menține, oricât de mare ar fi această rezultantă. În fig. 3.13, *b* corpul se mișcă, deși asupra lui acționează o forță \bar{R}' mult mai mică în modul decât \bar{R} . Motivul este că suportul acestei ultime forțe face cu normala un unghi mai mare decât unghiul de frecare φ .

Rezultatul poate fi generalizat cu ușurință în cazul unei suprafețe și al unei curbe oarecare.

Să considerăm o suprafață aspră oarecare, un punct M pe ea și normala MN în punctul considerat. O dreaptă care trece neconținut prin punctul M și face cu normala la suprafață unghiul de frecare φ generează un con cu două pînze numit con de frecare (fig. 3.14).

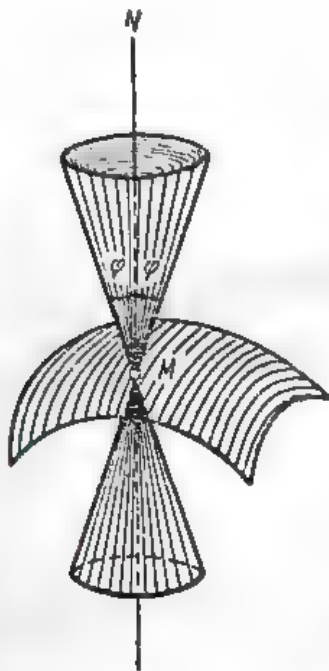


Fig. 3.14

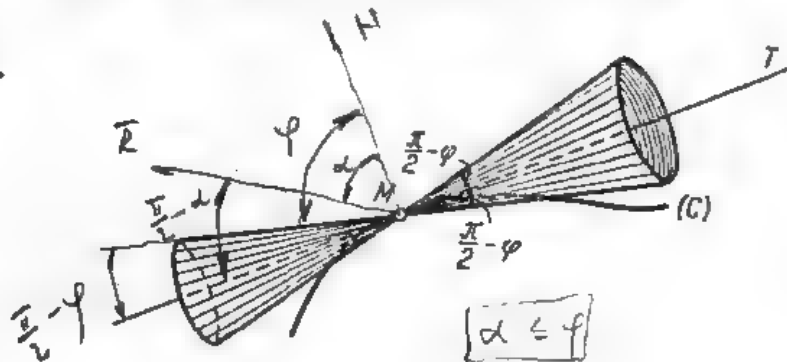


Fig. 3.15

Importanța acestui con este următoarea: s-a văzut că pentru echilibru este necesar ca suportul rezultantei \bar{R} a forțelor efectiv aplicate punctului să formeze cu normala la suprafață un unghi mai mic decât unghiul de frecare. Această condiție este îndeplinită dacă suportul rezultantei \bar{R} este situat în interiorul conului de frecare sau, pentru pozițiile de echilibru limită, pe suprafața conului.

Observație. În cazul cînd legătura este unilaterală condiția de mai înainte rămîne valabilă dacă se suprimă una dintre pînzele conului. Astfel dacă punctul material este obligat să rămînă pe partea concavă a unei suprafețe, rezultanta \bar{R} trebuie să fie dirijată către exteriorul suprafeței. În acest caz va trebui eliminată pînza conului de frecare situată în interior.

Să considerăm acum o curbă aspră oarecare (fig. 3.15), un punct M pe ea, tangenta MT și planul normal în punctul considerat. Generalizînd cele de mai înainte în cazul unei curbe se ajunge la concluzia că, pentru echilibru, este necesar ca suportul rezultantei \bar{R} să formeze cu planul normal un unghi mai mic, la limită egal cu unghiul de frecare φ . Să considerăm

o dreaptă care trece neconținut prin punctul M și face cu tangenta la curbă un unghi egal cu $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Această dreaptă generează un con cu două pînze numit *con de frecare*.

Este ușor de verificat că dacă suportul rezultantei \bar{R} a forțelor efectiv aplicate punctului material este exterior conului sau, la limită, pe suprafața acestui con, punctul material este în echilibru.

§ 14. **Expresii analitice.** Considerațiile geometrice făcute în paragraful precedent permit exprimarea condițiilor de echilibru cu frecare pe cale analitică, într-o formă foarte generală.

În cazul unei suprafețe de ecuație $f(x, y, z) = 0$ se știe că se poate obține ușor un vector care să aibă direcția normalei la suprafață: $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{k}$. Să considerăm și vectorul $\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$. Unghiul acestor doi vectori trebuie, pentru echilibru, să fie mai mic decît unghiul de frecare. Folosind produsul scalar al celor doi vectori se obține

$$\bar{R} \text{ grad } f = |\bar{R}| \cdot |\text{grad } f| \cdot \cos \alpha,$$

de unde

$$\cos \alpha = \frac{\bar{R} \text{ grad } f}{|\bar{R}| \cdot |\text{grad } f|}.$$

În funcție de proiecțiile pe axe ale celor doi vectori

$$\cos \alpha = \frac{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Dacă vectorii \bar{R} și $\text{grad } f$ fac între ei un unghi ascuțit, $\cos \alpha > 0$, iar dacă fac un unghi obtuz, $\cos \alpha < 0$. Vom considera în cele ce urmează $|\cos \alpha|$ a cărui valoare este

$$|\cos \alpha| = \frac{\left| X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Pentru ca $\alpha \leq \varphi$ este necesar ca

$$|\cos \alpha| \geq \cos \varphi.$$

$$\text{Dar } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Atunci condiția de echilibru se scrie

$$\frac{\left| X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (3.53)$$

În cazul unei curbe pe care o presupunem dată prin ecuațiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ se poate ușor găsi un vector dirijat în lungul tangentei

$$\bar{V} = x' \bar{i} + y' \bar{j} + z' \bar{k},$$

unde prin x' , y' , z' s-au notat derivatele funcțiilor x , y , z , în raport cu parametrul (în cazul de față, t).

Considerînd și rezultanta forțelor efectiv aplicate $\bar{Q} = X \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}$ putem exprima analog ca mai sus unghiul β dintre cei doi vectori printr-o relație analogă

$$\cos \beta = \frac{Xx' + Yy' + Zz'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Pentru echilibru, vectorul \bar{Q} trebuie să formeze cu planul normal un unghi mai mic decît unghiul de frecare sau, ceea ce este același lucru, cu tangenta la curbă un unghi $\beta \geq \frac{\pi}{2} - \varphi$. Aceasta are loc dacă

$$|\cos \beta| \leq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad \text{sau} \quad |\cos \beta| \leq \sin \varphi.$$

Cum $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$, condiția de echilibru a unui punct material pe o curbă aspră devine

$$\frac{|Xx' + Yy' + Zz'|}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (3.54)$$

Aplicații. 11°. Să se determine regiunile în care un punct material greu poate sta în echilibru pe o elice aspră (avînd coeficientul de frecare μ) de ecuații parametrice $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = h\theta$ (axa Oz verticală și ascendentă).

Rezolvare. În cazul de față $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -G$, iar derivatele în raport cu parametrul θ vor fi $x' = -a \sin \theta$, $y' = a \cos \theta$, $z' = h$.

Rezultă pentru echilibru

$$\frac{|-Gh|}{G\sqrt{a^2 + h^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Pentru că $|-Gh| = Gh$ rezultă

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \leq \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{sau} \quad h \leq a\mu.$$

Există atunci două posibilități: sau această inegalitate este satisfăcută și atunci punctul material este în echilibru în orice punct pe elice, sau această inegalitate nu este satisfăcută și atunci echilibrul este imposibil. Dacă $h = a\mu$ punctul este în echilibru limită (indiferent) în orice poziție pe elice.

12°. Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material greu pe o sferă aspră.

R e z o l v a r e. Dacă centrul sferei este în originea axelor de coordonate și raza ei este R , ecuația este $f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Presupunând axa Oz verticală și ascendentă $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$. Apoi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{|-G \cdot 2z|}{G\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Ținând seama că $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ condiția de echilibru se scrie

$$|-z| \geq \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Dacă $z > 0$, atunci $|-z| = z$ și $z \geq \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată deasupra planului de cotă $z = \frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Dacă $z < 0$, $|-z| = -z$ rezultă $z \leq -\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată sub planul de cotă $z = -\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

IV. SISTEME DE FORȚE

A. SISTEME GENERALE

§ 1. **Solidul rigid.** Corpurile din natură sînt deformabile, într-o măsură mai mare sau mai redusă. Nu există corp perfect rigid. Totuși, pentru anumite materiale (metale, lemn, zidării etc.), într-o primă aproximație, deformările pot fi neglijate fără ca rezultatele cercetărilor întreprinse să se îndepărteze sensibil de realitate. Se ajunge astfel la conceptul matematic de solid rigid. Acest concept ușurează mult calculul și este aplicat în mod deosebit în mecanica rațională.

Se numește *solid rigid* un corp la care distanța dintre două puncte oarecare rămîne aceeași cînd asupra sa acționează un sistem de forțe finite, oricît de mari ar fi aceste forțe.

În dinamică se va arăta că, în particular, dacă asupra solidului rigid acționează două forțe egale și direct opuse, în două puncte A și B diferite (fig. 4.1, a sau 4.1, b) ele nu au nici un efect asupra solidului. Dacă solidul se găsea în repaus față de un reper fix, el continuă să rămînă în stare de repaus; dacă se găsea în stare de mișcare, el continuă să se miște ca și cînd nimic n-ar fi intervenit din exterior.

Rezultă că, dat fiind un sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid, se pot introduce sau suprima oricînd două forțe egale și direct opuse, fără ca prin aceasta efectul sistemului de forțe asupra solidului rigid să se schimbe.

§ 2. Caracterul forțelor care acționează asupra solidului rigid. Să arătăm că punctul de aplicație al unei forțe poate fi deplasat pe suportul ei fără ca efectul pe care forța îl are asupra solidului rigid să se schimbe.

Într-adevăr, fie \vec{F} o forță care acționează în punctul A al unui solid rigid (fig. 4.2). Fie un punct B oarecare pe suportul forței \vec{F} . În acest punct se consideră aplicate două forțe \vec{F} și $-\vec{F}$ egale și opuse (fig. 4.2, b). Prin

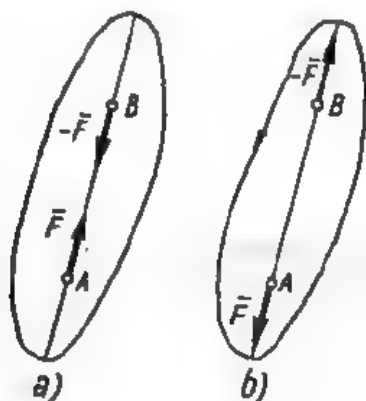


Fig. 4.1

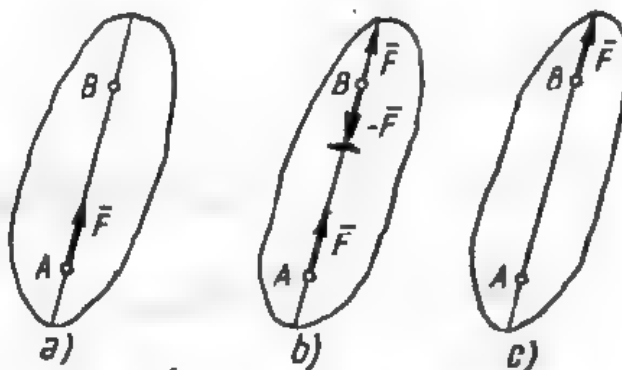


Fig. 4.2

aceasta efectul forței \vec{F} nu s-a schimbat. Se poate suprima acum perechea de forțe: \vec{F} (aplicată în A) și $-\vec{F}$ (aplicată în B). Nici prin această operație nu s-a schimbat nimic în ceea ce privește efectul forțelor asupra solidului. Se ajunge astfel la situația din fig. 4.2, c. Ori, această situație diferă de cea inițială prin faptul că punctul de aplicație al forței \vec{F} s-a deplasat pe suportul ei din A în B .

Forțele care acționează asupra unui solid rigid pot fi reprezentate deci prin *vectori alunecători*.

În consecință, pentru aceste forțe se aplică teoria vectorilor alunecători, care a fost prezentată în cadrul „Calculului vectorial” (cap. I, §§ 16–25).

Rezumăm rezultatele obținute la acel capitol, pe care însă le particularizăm pentru sistemele de forțe.

II. SISTEME DE FORȚE OARECARE

§ 3. Operații elementare de echivalență. Efectele mecanice ale unui sistem de forțe oarecare asupra unui rigid nu se schimbă dacă se înlocuiește într-un punct dat o forță sau mai multe forțe, cu un sistem echivalent, aplicând regulile stabilite anterior cu privire la paralelogramul forțelor. De asemenea, efectele mecanice nu se schimbă dacă se deplasează punctul de aplicație al unei forțe pe suportul ei. Acestea sînt cele două operații elementare de echivalență ce pot fi făcute cu forțele unui sistem care acționează asupra unui rigid.

§ 4. Invariantii unui sistem de forțe. Un sistem de forțe care acționează asupra unui rigid are ca invarianti față de operațiile elementare de echivalență:

a) *Vectorul rezultatant* \bar{R} definit ca sumă a forțelor și obținut prin aplicarea regulii paralelogramului forțelor. Expresia sa este

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i, \quad (4.1)$$

iar proiecțiile sale pe axe sînt

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i. \quad (4.2)$$

b) *Vectorul moment rezultatant în raport cu un punct O*, \bar{M}_O definit ca sumă a momentelor forțelor sistemului în raport cu acest punct. Expresia sa este

$$\bar{M}_O = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i, \quad (4.3)$$

unde s-a notat cu \bar{r}_i vectorul de poziție al punctului de aplicație A_i al unei forțe oarecare \bar{F}_i a sistemului, în raport cu punctul O ($\bar{r}_i = \overrightarrow{OA_i}$). Proiecțiile pe axe ale vectorului moment rezultatant sînt

$$M_{Ox} = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \quad M_{Oy} = \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \quad M_{Oz} = \sum (x_i Y_i - y_i X_i), \quad (4.4)$$

unde cu x_i, y_i, z_i s-au notat coordonatele punctului A_i .

Orice alt invariant față de operațiile elementare de echivalență, în afară de \bar{R} și \bar{M}_O sînt o combinație a acestor doi invarianti.

Ansamblul celor doi vectori poartă numele de *torsorul sistemului de forțe* în raport cu punctul O.

Vectorul \bar{R} rămîne același oricare ar fi punctul O de calcul al torsorului; vectorul \bar{M}_O se schimbă de la un punct la altul după legea (1.40)

$$\bar{M}_P = \bar{M}_O + \overrightarrow{PO} \times \bar{R}. \quad (4.5)$$

În cazul cînd $\bar{R} = 0$, momentul rezultatant \bar{M}_P nu variază. În cazul cînd $\bar{R} \neq 0$, \bar{M}_P variază devenind minim în punctele unei drepte denumite *axa centrală a sistemului de forțe*. Ecuația vectorială a acestei drepte poate fi pusă sub forma (1.70)

$$\bar{r} = \frac{\bar{M}_O \times \bar{R}}{\bar{R}^2} + \lambda \bar{R}. \quad (4.6)$$

Ecuațiile scalare ale aceleiași axe pot fi puse sub forma (1.75)

$$\frac{M_{Ox} - yZ + zY}{X} = \frac{M_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{M_{Oz} - xY + yX}{Z}, \quad (4.7)$$

Expresia momentului rezultatant minim (într-un punct al axei centrale) este (1.68)

$$M_{\min} = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{\bar{R}^2} = \frac{X \cdot M_{Ox} + Y \cdot M_{Oy} + Z \cdot M_{Oz}}{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (4.8)$$

§ 5. *Echivalența a două sisteme de forțe.* O consecință a teoriei generale a vectorilor alunecători este că două sisteme de forțe (S) și (S') sînt echivalente, adică produc același efect mecanic asupra unui rigid dacă au același vector

rezultant și același vector moment resultant în raport cu punctul O . Vom scrie aceste condiții prin egalitățile

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \bar{R}' \\ \bar{M}_O &= \bar{M}'_O \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Aceste două egalități pot fi strinse într-una singură, dacă se utilizează noțiunea de torsesor. Obținem atunci condiția: *doi sisteme de forțe (S) și (S') sunt echivalente dacă au în punctul O același torsesor, ceea ce se scrie*

$$\tau_O(S) = \tau_O(S'). \quad (4.10)$$

§ 6. Reducerea unui sistem de forțe. Reducerea unui sistem de forțe revine la găsirea celui mai simplu sistem de forțe, care să aibă același torsesor ca și sistemul dat (§ 5).

Tipurile de sisteme simple sînt limitate, în funcție de posibilitățile care există pentru componentele \bar{R} și \bar{M}_O ale torsesorului.

a) Cazul $\bar{R}=0$ și $\bar{M}_O=0$. Sistemul de forțe dat este echivalent cu zero sau în echilibru, deoarece un sistem (formal) care n-ar avea nici o forță, are evident $\bar{R}=0$ și $\bar{M}_O=0$, ca și sistemul dat.

b) Cazul $\bar{R}=0$ și $\bar{M}_O \neq 0$. Sistemul de forțe dat este echivalent cu un cuplu, ale cărui forțe acționează într-un plan normal pe vectorul \bar{M}_O , forțele \bar{F}_1 și $-\bar{F}_1$ ale cuplului fiind astfel alese încît

$$|\bar{F}_1| d_1 = |\bar{M}_O|, \quad (4.11)$$

unde prin d_1 s-a notat brațul cuplului (distanța dintre suporturile celor două forțe). Sensul forțelor \bar{F}_1 și $-\bar{F}_1$ trebuie să fie astfel alese încît sensul vectorului \bar{M}_O să respecte regula șurubului.

— În cazul cînd $\bar{R} \neq 0$, sistemul de forțe admite o axă centrală. În acest caz reducerea depinde de punctul în care este făcută. În cazul cînd punctul se află pe axa centrală reducerea se numește *canonică*.

În cazul cînd reducerea se face într-un punct oarecare O , sistemul de forțe poate fi înlocuit cu o forță $\bar{F} = \bar{R}$ aplicată în O și un cuplu ale cărui forțe \bar{F}_1 și $-\bar{F}_1$ sînt situate într-un plan normal pe vectorul \bar{M}_O , la o distanță d_1 , astfel încît să fie îndeplinită relația (4.11) și să fie respectată regula șurubului.

În cazul reducerii canonice se deosebesc două cazuri, după cum momentul resultant minim M_{min} dat de relația (4.8) este nul sau diferit de zero. Deoarece am presupus $\bar{R}^2 \neq 0$, totul revine la a studia cazurile cînd scalarul torsesorului $\bar{R} \bar{M}_O$ este nul sau diferit de zero.

c) Cazul $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{R} \bar{M}_O = 0$. Sistemul de forțe se reduce la o forță unică $\bar{F} = \bar{R}$ aplicată într-un punct de pe axa centrală și avînd direcția acestei axe.

d) Cazul $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{R} \bar{M}_O \neq 0$. Sistemul se reduce la o forță $\bar{F} = \bar{R}$ aplicată într-un punct de pe axa centrală și la un cuplu ale cărui forțe \bar{F}_1 și $-\bar{F}_1$

acționează într-un plan normal pe axa centrală pe două suporturi situate la distanța d_1 astfel încît să subsiste relația

$$|F_1| d_1 = |\mathcal{M}_{min}| \quad (4.12)$$

și să fie respectată regula șurubului drept. Un asemenea sistem de forțe alcătuit dintr-o forță și dintr-un cuplu acționînd într-un plan normal pe suportul forței nu are încă o denumire consacrată. Îl vom denumi în cele ce urmează *dinamă*, *torsor minim* sau *răsucitor*.

În concluzie există patru cazuri posibile de reducere a unui sistem de forțe:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \bar{R}=0, \bar{M}_0=0 \text{ echilibru} \\ \text{b) } \bar{R}=0, \bar{M}_0 \neq 0 \text{ cuplu} \\ \text{c) } \bar{R} \neq 0, \bar{R} \cdot \bar{M}_0 = 0 \text{ forță unică} \\ \text{d) } \bar{R} \neq 0, \bar{R} \cdot \bar{M}_0 \neq 0 \text{ dinamă (torsor minim, răsucitor).} \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

Se poate da o interesantă interpretare fizică acestor patru cazuri de reducere a sistemelor de forțe, dacă se consideră posibilitățile de mișcare ale rigidului. Să presupunem că sistemul de forțe ar acționa asupra unui corp omogen de formă sferică care se află în stare de repaus față de un reper inertial.

Dacă sistemul de forțe este în echilibru, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul continuă să rămînă în repaus.

Dacă sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul începe să se rotească în jurul unei axe paralele cu vectorul \bar{M}_0 și trecînd prin centrul sferei.

Dacă sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică trecînd prin centrul sferei, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul capătă o mișcare de translație în direcția și sensul vectorului \bar{R} .

În sfîrșit, dacă sistemul de forțe este echivalent cu o dinamă (torsor minim, răsucitor) a cărei axă centrală trece prin centrul sferei, atunci corpul capătă o mișcare elicoidală deplasîndu-se în lungul axei centrale, în direcția și sensul indicat de \bar{R} și rotindu-se în jurul aceleiași axe în sensul indicat de \bar{M}_0 .

Observație. Concluziile de mai sus nu mai sînt riguroase în cazul unui corp de o formă oarecare, sau în cazul cînd corpul sferic nu se află inițial în repaus. În cazul general mișcarea corpului este determinată, așa cum se va arăta în dinamică, de condițiile inițiale, de masa sa, de momentele de inerție principale centrale și de sistemul de forțe. Faptul că în cazul unui corp sferic omogen elementul hotărîtor este sistemul de forțe, se datorește simetriei corpului. Menționăm că și în cazul unui cub, octaedru regulat etc. concluziile arătate în cazul corpului sferic rămîn adevărate.

Aplicații. 1°. Asupra unui corp de formă paralelipipedică ($OA=a$, $OB=OC=2a$) acționează sistemul de forțe F_1, \dots, F_8 , avînd punctele de aplicație, direcțiile și sensurile indicate în fig. 4.3, iar ca module $|F_1|=|\bar{F}_2|=|\bar{F}_3|=|\bar{F}_4|=P$; $|\bar{F}_5|=|\bar{F}_6|=2P$. Se cere: a) să se facă reducerea sistemului de forțe în raport cu punctul O ; b) să se arate că sistemul se reduce la o dinamă; c) să se scrie ecuațiile axei centrale; d) să se calculeze elementele torsorului minim (vectorul rezultat și vectorul moment rezultat într-un punct de pe axa centrală).

Rezolvare. a) Vom calcula proiecțiile vectorului rezultat și ale momentului rezultat pe axe de coordonate. Se obține:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 = Y_1 + Y_2 = P - P = 0$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 = Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 = 2P + P + 2P + P = 6P$$

$$M_{Ox} = Z_3 \cdot AD + Z_4 \cdot OB = 2P \cdot 2a + P \cdot 2a = 6Pa$$

$$M_{Oy} = -Z_4 \cdot OA - Z_5 \cdot BD = -P \cdot a - 2P \cdot a = -3Pa$$

$$M_{Oz} = Y_1 \cdot OA = Pa.$$

Rezultă

$$\vec{R} = 6P\vec{k}, \quad \vec{M}_O = 6Pa\vec{i} - 3Pa\vec{j} + Pa\vec{k}.$$

b) Observăm că $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$. Calculând trinomul invariant obținem $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 6P^2a \neq 0$. Sistemul de forțe se reduce la o dinamică (torsesor minim, răsucitor).

c) Ecuațiile axei centrale, care în cazul general sînt

$$\frac{M_{Ox} - yZ + zY}{X} = \frac{M_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{M_{Oz} - xY + yX}{Z},$$

în cazul de față devin

$$\frac{6Pa - 6Py}{0} = \frac{-3Pa + 6Px}{0} = \frac{Pa}{6P}.$$

Aceste ecuații mai pot fi scrise $x = \frac{a}{2}$, $y = a$. Rezultă că axa centrală este paralelă cu axa Ox . Ea este una din axe de simetrie ale paralelipipedului.

d) Vectorul rezultat \vec{R} rămîne același ca în O ($\vec{R} = 6P\vec{k}$). Vectorul moment rezultat va deveni

$$\vec{M}_r = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} \vec{R} = \frac{6P^2a}{36P^2} \cdot 6P\vec{k} = Pa\vec{k}.$$

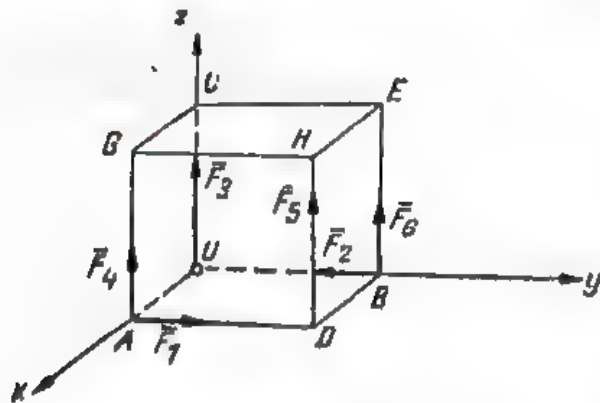


Fig. 4.3

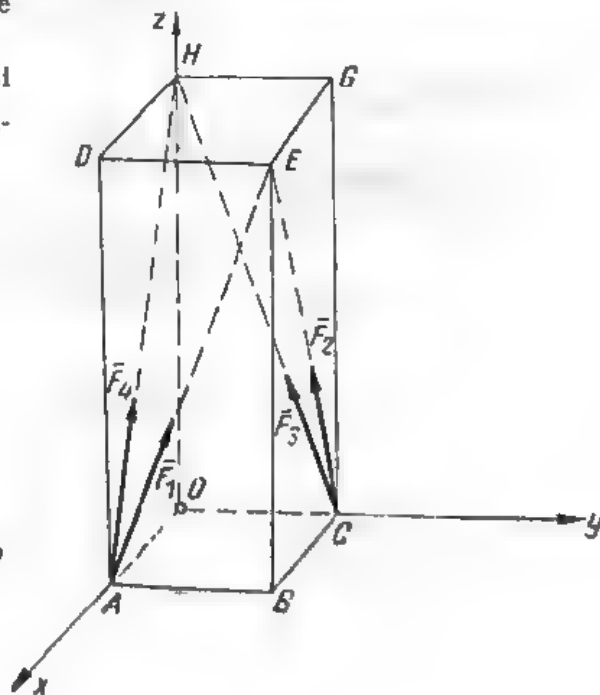


Fig. 4.4

2°. Pe fețele laterale ale unui paralelipiped acționează forțele \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 și \vec{F}_4 , avînd direcțiile diagonalelor AB , BC , CD și DA , și sensurile indicate în fig. 4.4. Știînd că $OA = 3a$, $OC = 4a$, $OH = 12a$, iar $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 4P\sqrt{10}$, $\vec{F}_3 = \vec{F}_4 = 3P\sqrt{17}$, se cere:

- să se reducă sistemul de forțe în raport cu punctul O ;
- cu ce este echivalent sistemul de forțe;

- c) ecuațiile axei centrale;
d) elementele torsorului minim.

Rezolvare. a) Vom calcula proiecțiile vectorului rezultat și ale momentului rezultat pe axe. Observând că

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \text{vers } \vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \text{vers } \vec{AE} = |\vec{F}_1| \cdot \frac{\vec{AE}}{|\vec{AE}|} = 4P\sqrt{10} \frac{4a\vec{j} + 12a\vec{k}}{\sqrt{16a^2 + 144a^2}} = 4P\vec{j} + 12P\vec{k},$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \text{vers } \vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \text{vers } \vec{CE} = |\vec{F}_2| \cdot \frac{\vec{CE}}{|\vec{CE}|} = 3P\sqrt{17} \frac{3a\vec{i} + 12a\vec{k}}{\sqrt{9a^2 + 144a^2}} = 3P\vec{i} + 12P\vec{k},$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \text{vers } \vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \text{vers } \vec{CH} = |\vec{F}_3| \cdot \frac{\vec{CH}}{|\vec{CH}|} = 4P\sqrt{10} \frac{-4a\vec{j} + 12a\vec{k}}{\sqrt{16a^2 + 144a^2}} = -4P\vec{j} + 12P\vec{k},$$

$$\vec{F}_4 = |\vec{F}_4| \text{vers } \vec{F}_4 = |\vec{F}_4| \text{vers } \vec{AH} = |\vec{F}_4| \cdot \frac{\vec{AH}}{|\vec{AH}|} = 3P\sqrt{17} \frac{-3a\vec{i} + 12a\vec{k}}{\sqrt{9a^2 + 144a^2}} = -3P\vec{i} + 12P\vec{k}.$$

vom avea

$$X = X_3 + X_4 = 3P - 3P = 0,$$

$$Y = Y_1 + Y_3 = 4P - 4P = 0,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 12P + 12P + 12P + 12P = 48P,$$

$$M_{Ox} = Z_3 \cdot OC + Z_4 \cdot OC = 12P \cdot 4a + 12P \cdot 4a = 96Pa,$$

$$M_{Oy} = -Z_1 \cdot OA - Z_2 \cdot OA = -12P \cdot 3a - 12P \cdot 3a = -72Pa,$$

$$M_{Oz} = Y_1 \cdot OA - X_3 \cdot OC = 4P \cdot 3a - 3P \cdot 4a = 0.$$

Deci

$$\vec{R} = 48P\vec{k}, \quad \vec{M}_O = 96Pa\vec{i} - 72Pa\vec{j}.$$

b) Se observă că $R \neq 0$. Trinomul invariant $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = X M_{Ox} + Y M_{Oy} + Z M_{Oz} = 0$.
Deci sistemul de forțe se reduce la o forță unică.

c) Ecuațiile axei centrale, care, în cazul general sînt

$$\frac{M_{Ox} - yZ + zY}{X} = \frac{M_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{M_{Oz} - xY + yX}{Z},$$

în cazul de față devin

$$\frac{96Pa - 48Py}{0} = \frac{-72Pa + 48Px}{0} = \frac{0}{48P}.$$

Aceste ecuații pot fi scrise mai simplu: $y = 2a$, $x = \frac{3a}{2}$ și ne arată că axa centrală a sistemului de forțe coincide cu axa de simetrie paralelă cu Ox , a paralelipipedului.

C. SISTEME PARTICULARE DE FORȚE

Vom analiza cîteva sisteme particulare de forțe care intervin mai des în aplicațiile practice.

§ 7. **Forțe concurente.** Vom numi forțe concurente în cazul unui rigid, forțele ale căror suporturi sînt concurente. Cazul acesta este ceva mai general

decît cel din cazul punctului material, cînd forțele aveau și același punct de aplicație.

Fie O punctul comun al suporturilor forțelor. Vom calcula torsorul sistemului în raport cu acest punct. Momentul resultant în raport cu O este evident nul. Ca urmare și scalarul torsorului $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, deci nu sînt posibile decît două cazuri de reducere:

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O = 0 & \text{echilibru} \\ \bar{R} \neq 0, \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 & \text{forță unică.} \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Regăsim astfel rezultatele cunoscute de la sistemele de forțe concurente care acționează asupra punctului material.

Axa centrală trece prin O și coincide cu suportul rezultantei.

§ 8. Forțe în plan. Vom numi forțe în plan, forțele ale căror suporturi se găsesc în același plan (Π). Fie O un punct din acest plan. Vom calcula torsorul în raport cu O . Momentul unei forțe oarecare \bar{F}_i a sistemului în raport cu O este evident un vector normal pe planul (Π). Și momentul resultant \bar{M}_O va fi în cazul general un vector normal pe planul (Π). Cum forțele au suporturile lor în planul (Π), vectorul resultant \bar{R} în cazul general va fi și el cuprins în planul (Π). Deducem că vectorii \bar{R} și \bar{M}_O sînt ortogonali, deci $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$. Nu sînt deci posibile decît 3 cazuri de reducere a unui sistem de forțe plane:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } \bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O = 0 & \text{echilibru} \\ \text{b) } \bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O \neq 0 & \text{cuplu} \\ \text{c) } \bar{R} \neq 0, \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0 & \text{forță unică.} \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

Axa centrală se poate determina folosind faptul că în cazul $\bar{R} \neq 0$ nu este posibil decît cazul de reducere la o forță unică. Momentul resultant fiind un invariant față de operațiile elementare de echivalență, urmează că el va fi egal cu momentul forței unice, respectiv al rezultantei. Această proprietate este cunoscută sub numele de *teorema lui Varignon*. Ea se scrie:

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O, \quad (4.16)$$

unde prin \bar{r} s-a notat vectorul de poziție al unui punct curent de pe axa centrală. Ecuația (4.16) poate fi considerată ca ecuația vectorială a axei centrale a sistemului.

Alegînd un sistem de axe $Oxyz$ astfel încît planul forțelor să coincidă cu xOy și notînd cu x, y, z coordonatele unui punct curent de pe axa centrală, cu X și Y proiecțiile vectorului \bar{R} pe axele Ox și Oy ($Z=0$) și cu M_{Oz} proiecția vectorului \bar{M}_O pe axa Oz ($M_{Ox}=0, M_{Oy}=0$), ecuația (4.16) se scrie

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = M_{Oz} \bar{k},$$

de unde deducem

$$z=0, Yx - Xy = M_0, \quad (4.17)$$

care sînt ecuațiile axei centrale. Prima ecuație arată că axa centrală se află în planul forțelor.

Aplicație. 3°. Se consideră (fig. 4.5) două ziduri de sprijin de aceeași lungime, unul avînd secțiunea transversală dreptunghiulară de dimensiuni $b \times h$ și fiind acționat de

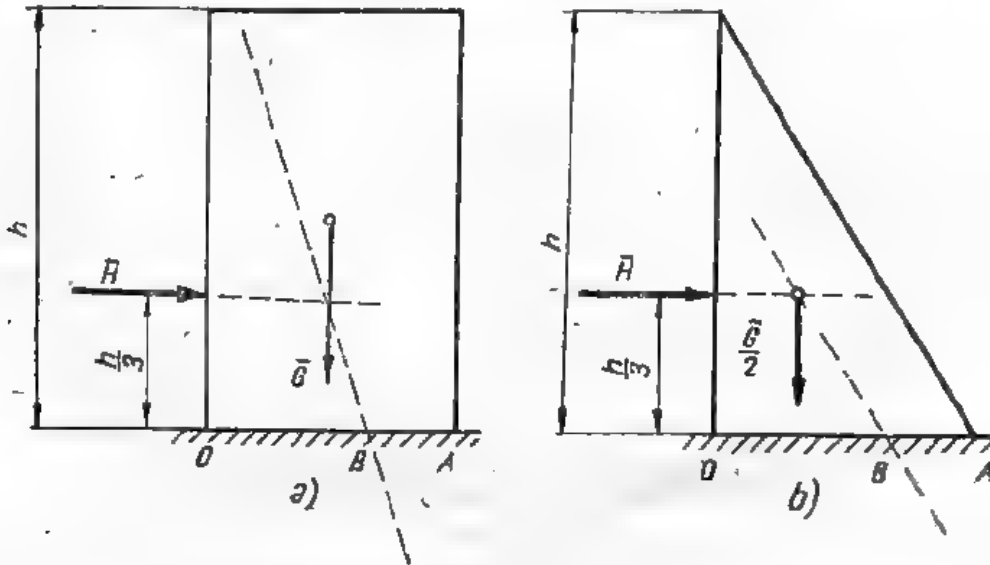


Fig. 4.5

greutatea G aplicată la distanța $\frac{b}{2}$ de muchia ce se proiectează în O și un al doilea zid avînd secțiunea transversală triunghiulară care este acționat de o forță $\frac{G}{2}$ aplicată la distanța $\frac{b}{3}$ de aceeași muchie. Ce forță orizontală H poate suporta primul zid și ce forță H poate suporta cel de-al doilea zid astfel încît axa centrală a sistemului de forțe date să intersecteze baza OA în punctul B ($OB = \frac{2}{3}b$). Discuție.

Rezolvare. Deoarece axa centrală trece prin B vom reduce sistemul de forțe în raport cu acest punct. Momentul resultant în raport cu B trebuie să fie nul, căci, în raport cu un punct de pe axa centrală un sistem de forțe plane se reduce întotdeauna la o forță unică. Rezultă atunci:

în cazul zidului de secțiune dreptunghiulară

$$G \left(\frac{2b}{3} - \frac{b}{2} \right) - H \frac{h}{3} = 0, \text{ de unde } H = \frac{Gb}{2h};$$

în cazul zidului de secțiune triunghiulară

$$\frac{G}{2} \left(\frac{2b}{3} - \frac{b}{3} \right) - H \frac{h}{3} = 0, \text{ de unde } H = \frac{Gb}{2h}.$$

Se observă că s-a obținut aceeași valoare pentru forța H . De aici se poate trage concluzia că cele două ziduri de sprijin se comportă la fel. Zidul de secțiune triunghiulară este mai avantajos fiind, evident, mai economic.

§ 9. Cupluri. Dacă asupra unui rigid acționează simultan mai multe cupluri $(F_1, -F_1), (F_2, -F_2), \dots, (F_i, -F_i), \dots, (F_n, -F_n)$, vom observa că

rezultanta fiecărui cuplu în parte fiind nulă și rezultanta întregului sistem de cupluri va fi de asemenea nulă. Momentul resultant \bar{M}_O al sistemului de cupluri este egal cu suma momentelor cuplurilor. Deci

$$\bar{R}=0, \quad \bar{M}_O=\Sigma \bar{M}_i, \quad (4.18)$$

unde prin \bar{M}_i am notat momentul cuplului $(\bar{F}_i, -\bar{F}_i)$.

Din expresiile (4.18) deducem că în cazul unui sistem de cupluri nu sînt posibile decît două cazuri de reducere

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{R}=0, \quad \bar{M}_O=0 & \text{echilibru} \\ \bar{R}=0, \quad \bar{M}_O \neq 0 & \text{cuplu.} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Deci în cazul cel mai general un sistem de cupluri este echivalent cu un cuplu unic situat într-un plan normal pe vectorul \bar{M}_O .

§10. Forțe paralele. Să considerăm un sistem de forțe avînd suporturile paralele cu o aceeași axă de versor \bar{u} . O forță oarecare \bar{F}_i a sistemului se va scrie

$$\bar{F}_i = F_i \bar{u}, \quad (4.20)$$

unde prin F_i s-a notat scalarul forței \bar{F}_i . Forțele pentru care $F_i > 0$ au același sens ca și axa, iar forțele pentru care $F_i < 0$ au, sens contrar.

Vectorul resultant are expresia

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i = \Sigma F_i \bar{u} = \bar{u} \Sigma F_i. \quad (4.21)$$

Vectorul moment resultant se poate pune sub forma

$$\bar{M}_O = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \Sigma \bar{r}_i \times F_i \bar{u} = \Sigma F_i \bar{r}_i \times \bar{u} = (\Sigma F_i \bar{r}_i) \times \bar{u}. \quad (4.22)$$

Din expresiile (4.21) și (4.22) rezultă că vectorul \bar{R} este paralel cu \bar{u} , iar \bar{M}_O este ortogonal pe \bar{u} , fiind produsul vectorial dintre \bar{u} și un alt vector. Deci $\bar{M}_O \perp \bar{R}$, de unde deducem $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$. În consecință, un sistem de forțe paralele nu se poate reduce niciodată la o dinamă (torsesor minim, răsucitor). Rămîn numai trei cazuri posibile

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } \bar{R}=0, \quad \bar{M}_O=0 & \text{echilibru} \\ \text{b) } \bar{R}=0, \quad \bar{M}_O \neq 0 & \text{cuplu} \\ \text{c) } \bar{R} \neq 0, \quad \bar{R} \cdot \bar{M}_O=0 & \text{forță unică} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

Deoarece în cazul cel mai general posibil sistemul de forțe paralele se reduce la o forță unică, pentru determinarea axei centrale vom utiliza ca și în cazul forțelor plane teorema lui Varignon sub forma (4.16):

$$\bar{r} \times \bar{R} = \bar{M}_O,$$

în care, înlocuind \bar{R} și \bar{M}_O cu expresiile (4.21) și (4.22) obținem

$$\bar{r} \times \bar{u} \cdot \Sigma F_i = (\Sigma F_i \bar{r}_i) \times \bar{u},$$

sau

$$\begin{aligned}\bar{r}(\sum F_i) \times \bar{u} &= (\sum F_i \bar{r}_i) \times \bar{u}, \\ [(\sum F_i) \bar{r} - \sum F_i \bar{r}_i] \times \bar{u} &= 0.\end{aligned}$$

Din această ultimă relație deducem paralelismul celor doi vectori $[(\sum F_i) \bar{r} - \sum F_i \bar{r}_i]$ și \bar{u} , deci

$$(\sum F_i) \bar{r} - \sum F_i \bar{r}_i = \mu \bar{u},$$

unde μ este un parametru variabil. De aici deducem pentru \bar{r} expresia

$$\bar{r} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} + \frac{\mu}{\sum F_i} \bar{u},$$

sau încă

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \lambda \bar{u}, \quad (4.24)$$

unde am notat cu $\bar{\rho}$ expresia

$$\bar{\rho} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}, \quad (4.25)$$

iar cu λ un alt parametru variabil care se deduce din parametrul μ prin împărțire cu scalarul $\sum F_i$.

Ecuatia (4.24) este ecuația axei centrale. Sub această formă se recunoaște ușor că axa centrală trece prin punctul C , de vector de poziție $\bar{\rho}$, și are aceeași direcție ca și forțele.

Punctul C definit de vectorul $\bar{\rho}$ se bucură de o proprietate remarcabilă. Astfel, dacă se presupune că, fără a schimba punctele de aplicație ale forțelor și nici mărimile lor scalare, le rotim în așa fel încât în noua lor poziție forțele să devină paralele cu o altă axă de versor \bar{u}' , se constată că noua ecuație a axei centrale este

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \lambda \bar{u}'$$

căci vectorul de poziție $\bar{\rho}$ nu s-a schimbat.

De aici se trage concluzia că în aceste condiții axa centrală trece prin punctul fix C . Acest punct remarcabil poartă numele de *centru al sistemului de forțe paralele*.

Coordonatele ξ , η și ζ ale punctului C se obțin proiectând pe axe relația (4.25). Se obține

$$\xi = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad \eta = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad \zeta = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (4.26)$$

Expresia (4.25) a vectorului de poziție al centrului forțelor paralele permite să se deducă următoarele proprietăți ale acestuia:

a) *Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de direcția forțelor* [expresia (4.25) este independentă de \bar{u}].

b) Poziția centrului forțelor paralele nu se schimbă dacă toate forțele se măresc sau se micșorează în același raport k . Într-adevăr înlocuind F_i cu kF_i se obține

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum k F_i \bar{r}_i}{\sum k F_i} = \frac{k \sum F_i \bar{r}_i}{k \sum F_i} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i}.$$

c) Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de sistemul de referință, el fiind un element intrinsec al sistemului de forțe.

Într-adevăr, să presupunem că se schimbă sistemul de referință. Fie O' noua origine. Să notăm $\overline{O'O} = \bar{r}_0$. Rezultă că vectorul de poziție \bar{r}'_i al unui punct A_i față de noul sistem este legat de vectorul de poziție \bar{r}_i al aceluiași punct față de vechiul sistem prin relația

$$\bar{r}'_i = \bar{r}_0 + \bar{r}_i. \quad (4.27)$$

Centrul C al forțelor paralele va avea față de noul sistem vectorul de poziție: $\bar{r}_0 + \bar{\rho}$.

Dacă centrul forțelor paralele s-ar schimba, atunci când s-ar trece la noul sistem de referință, notînd cu C' noua sa poziție și cu $\bar{\rho}'$ vectorul de poziție corespunzător, am avea

$$\bar{\rho}' = \bar{r}_0 + \bar{\rho} + \overline{CC'}. \quad (4.28)$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (4.25) și de (4.27), vectorul de poziție $\bar{\rho}'$ va avea expresia

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum F_i (\bar{r}_0 + \bar{r}_i)}{\sum F_i} = \frac{\bar{r}_0 \sum F_i + \sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}. \quad (4.28)$$

Comparînd acum relațiile (4.28) și (4.29) deducem că $\overline{CC'} = 0$, de unde $C' \equiv C$, deci poziția centrului maselor nu depinde de sistemul de referință, el fiind un element intrinsec al sistemului de forțe.

Aplicații. 4°. Să se determine centrul forțelor paralele \bar{F}_1 și \bar{F}_2 aplicate în punctele $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Folosind formulele (4.26) obținem

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}, \quad \eta = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2}, \quad \zeta = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2}.$$

Dacă notăm raportul $\frac{F_2}{F_1} = k$, expresiile coordonatelor centrului forțelor paralele devin

$$\xi = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k},$$

$$\eta = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k},$$

$$\zeta = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}.$$

În această formă se recunosc coordonatele unui punct care împarte segmentul A_1A_2 în raportul h . Deci

$$\frac{CA_1}{CA_2} = h = \frac{F_2}{F_1}.$$

Din această relație rezultă că, în cazul a două forțe paralele centrul lor C împarte segmentul A_1A_2 în raportul invers raportului scalarilor forțelor. Deci, punctul C este mai apropiat de forța al cărei modul este mai mare.



Fig. 4.6

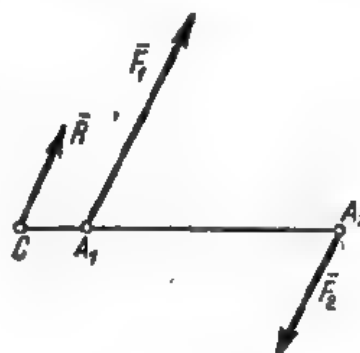


Fig. 4.7

Mai rezultă că dacă forțele F_1 și F_2 au același sens, $h > 0$ și C se găsește în interiorul segmentului A_1A_2 (fig. 4.6), iar dacă F_1 și F_2 au sensuri opuse, $h < 0$ și C se găsește în exteriorul segmentului A_1A_2 , de partea forței celei mai mari (fig. 4.7).

5°. Să se determine rezultanta forțelor paralele din fig. 4.8.

Rezolvare. Vom aplica teorema lui Varignon. Vom scrie că suma momentelor forțelor, de exemplu în raport cu punctul A , este egală cu momentul rezultantei sistemului, calculat în raport cu același punct. Scalarul rezultantei, presupusă dirijată în jos, va fi

$$R = P + P - 2P + 3P - 2P + 4P = 5P.$$

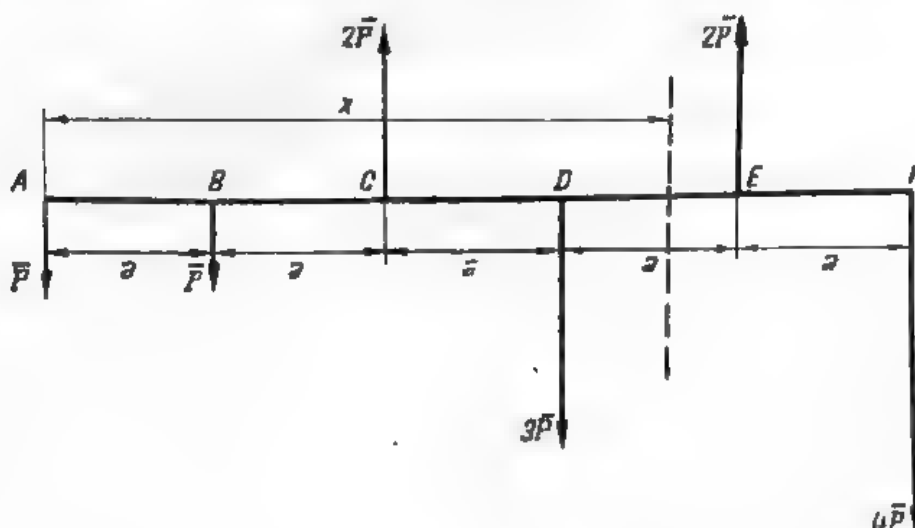


Fig. 4.8

Am obținut un scalar pozitiv, deci rezultanta este într-adevăr dirijată în jos, așa cum s-a presupus. Fie x distanța de la A la suportul rezultantei, presupus situat la dreapta punctului A . Teorema lui Varignon se scrie

$$-Pa + 2P \cdot 2a - 3P \cdot 3a + 2P \cdot 4a - 4P \cdot 5a = -5P \cdot x,$$

Această ecuație se mai scrie

$$-18 Pa = -5 Px, \text{ de unde } x = 3,6 a.$$

6°. O placă dreptunghiulară $OABC$ de dimensiuni $2,10 \times 2,40$ m² este acționată de patru forțe verticale, egale respectiv cu P , $2P$, $3P$ și $4P$ (fig. 4.9). În ce punct trebuie suspendată placa cu un fir, astfel încât ea să rămână în echilibru, în poziție orizontală?

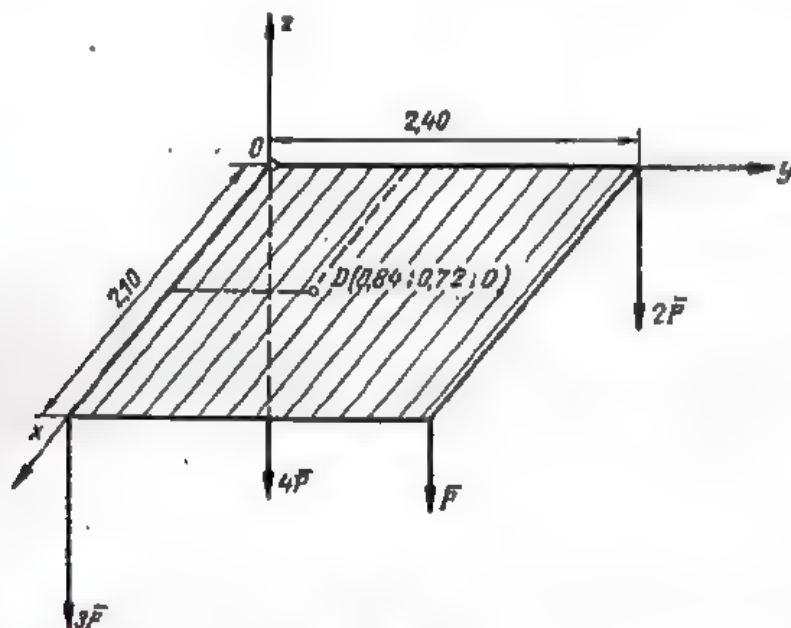


Fig. 4.9

Rezolvare. Tensiunea din fir trebuie să echilibreze rezultanta celor patru forțe paralele. Rezultanta acționează în centrul acestor forțe paralele, deci și firul trebuie legat de placă în acest centru. Alegând sistemul de axe din figură și observând că $x_0 = x_A = x_B = x_C = 0$, deducem $\bar{x} = 0$. Celelalte două coordonate ale centrului forțelor paralele vor fi

$$\xi = \frac{3P \times 2,10 + P \times 2,10}{10P} = 0,84 \text{ m}, \quad \eta = \frac{P \times 2,40 + 2P \times 2,40}{10P} = 0,72 \text{ m}.$$

Deci firul trebuie legat în punctul $D(0,84; 0,72; 0)$.

7°. Să se determine poziția suportului rezultantei forțelor paralele distribuite din fig. 4.10, a , b , c , d .

Rezolvare. Vom considera în toate cazurile sarcini elementare $p_x dx$. Sumele din formulele ce dau coordonatele centrului forțelor paralele se vor transforma în integrale. În particular, pentru cazurile din fig. 4.10, vom avea

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x dx}{\int_0^a p_x dx}.$$

Pentru cazul din fig. 4.10, a , acela al unei sarcini uniform distribuite, avem $p_x = p$ (constant) și

$$P = \int_0^a p_x dx = \int_0^a p dx = pa, \quad \xi = \frac{\int_0^a x p dx}{\int_0^a p dx} = \frac{\frac{x^2}{2} \Big|_0^a}{\frac{x}{1} \Big|_0^a} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a} = \frac{a}{2}.$$

Deci o sarcină uniform distribuită este echivalentă cu o sarcină concentrată $P = pa$, aplicată la mijlocul porțiunii încredințate.

Pentru cazul din fig. 4.10, b (sarcină triunghiulară) $p_x = p \frac{x}{a}$ și rezultă

$$P = \int_0^a p_x dx = \int_0^a p \frac{x}{a} dx = \frac{p}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{pa}{2},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x dx}{\int_0^a p_x dx} = \frac{\int_0^a x p \frac{x}{a} dx}{\int_0^a p \frac{x}{a} dx} = \frac{\frac{p}{a} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a}{\frac{p}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a} = \frac{\frac{2}{3} a}{\frac{1}{2} a} = \frac{2}{3} a.$$

Deci o sarcină distribuită triunghiular este echivalentă cu o sarcină concentrată $P = \frac{1}{2} pa$, aplicată la o distanță de $\frac{2}{3} a$ de una din extremități și $\frac{1}{3} a$ de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.

Pentru cazul din fig. 4.10, c (sarcină parabolică), $p_x = p \frac{x^2}{a^2}$ și rezultă

$$P = \int_0^a p_x dx = \int_0^a p \frac{x^2}{a^2} dx = \frac{p}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{pa}{3},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x dx}{\int_0^a p_x dx} = \frac{\int_0^a x p \frac{x^2}{a^2} dx}{\int_0^a p \frac{x^2}{a^2} dx} = \frac{\frac{p}{a^2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a}{\frac{p}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a} = \frac{3}{4} a.$$

Deci o sarcină parabolică de forma celei din fig. 4.10, c se poate înlocui cu o sarcină concentrată $P = \frac{pa}{3}$ (a treia parte din aria dreptunghiului circumscris) și este aplicată la o distanță de $\frac{3}{4} a$ de una din extremități și $\frac{1}{4} a$ de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.

Pentru cazul din figura 4.10, d (sarcină parabolică) $p_x = \left[2 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right]$ și rezultă

$$P = \int_0^a p_x dx = \int_0^a p \left[2 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right] dx = \frac{2p}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^a - \frac{p}{a^3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{2pa}{3},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x dx}{\int_0^a p_x dx} = \frac{\int_0^a x p \left[2 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right] dx}{\int_0^a p \left[2 \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right] dx} = \frac{\frac{2p}{a} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a - \frac{p}{a^3} \frac{x^5}{5} \Big|_0^a}{\frac{2pa}{3}} = \frac{5a}{8}.$$

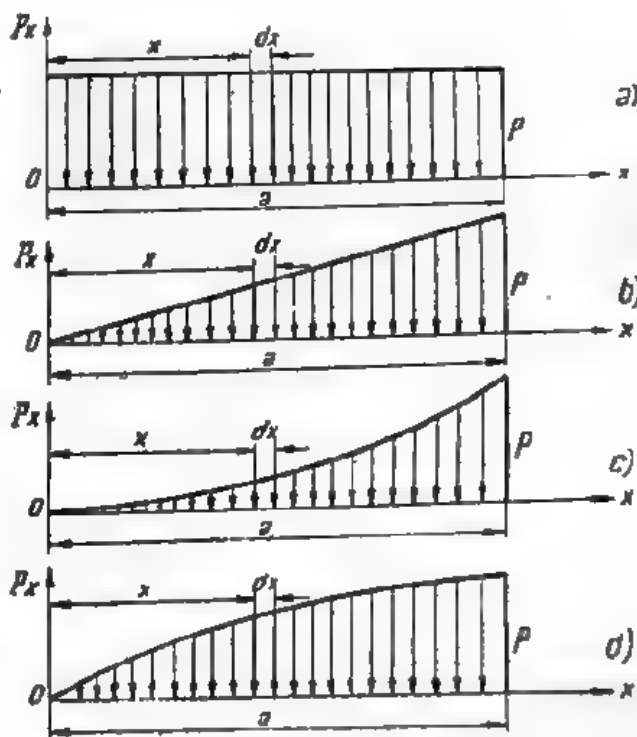


Fig. 4.10

Deci o sarcină parabolică de forma celei din fig. 4.10., d este echivalentă cu o sarcină concentrată $P = \frac{2}{3}pa$ (două treimi din aria dreptunghiului circumscris) aplicată la o distanță de $\frac{5}{8}a$ de una din extremități și $\frac{3}{8}a$ de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.

V. CENTRUL MASELOR

(Centrul de greutate)

§ 1. Greutatea corpurilor. Toate corpurile situate la suprafața Pământului sînt grele, adică sînt supuse unei forțe numită *greutate*. Aceasta dovedește că la suprafața Pământului există un câmp de intensitate \vec{g} ; acest câmp poartă numele de câmp gravitațional terestru și se manifestă prin aceea că asupra unei particule materiale de masă m se exercită în acest câmp o forță proporțională cu masa

$$\vec{G} = m \vec{g}. \quad (5.1)$$

Intensitatea \vec{g} a câmpului gravitațional terestru, așa cum se va demonstra în dinamică, este variabilă cu latitudinea și cu altitudinea. Astfel, la nivelul mării, la ecuator $g = 9,781 \text{ m/s}^2$ și la pol $g = 9,831 \text{ m/s}^2$. În ceea ce privește direcția, vectorul \vec{g} este dirijat aproximativ către centrul Pământului. Abaterea atinge valoarea maximă de circa $6'$ la latitudinea de 45° față de verticala teoretică a locului.

Dacă se studiază o problemă de mecanică care afectează o regiune ale cărei dimensiuni sînt neglijabile față de acelea ale Pământului, câmpul \vec{g} poate fi considerat aproximativ constant. Ca o consecință, greutatea \vec{G}_i ale diferitelor corpuri de mase m_i pot fi socotite *forțe paralele* și li se pot aplica rezultatele studiului făcut în capitolul precedent relativ la forțele paralele.

§ 2. Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale. Să considerăm un sistem de puncte materiale P_i de mase m_i . Fie \vec{r}_i vectorii lor de poziție. Dacă presupunem că un asemenea sistem se găsește la suprafața Pământului, deci în câmpul gravitațional terestru, și are dimensiuni neglijabile în raport cu ale Pământului, atunci greutatea punctelor materiale P_i sînt paralele între ele și egale cu

$$\vec{G}_i = m_i \vec{g}.$$

Aplicînd în acest caz rezultatele stabilite la cap. IV, § 10, ajungem ușor la concluzia că sistemul de forțe \vec{G}_i poate fi înlocuit cu o forță unică

$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i = \sum m_i \vec{g} = M \vec{g} \quad (5.2)$$

denumită greutatea sistemului de puncte materiale (greutatea corpului). În formula (5.2) s-a notat

$$\sum m_i = M \quad (5.3)$$

M fiind masa sistemului de puncte materiale.

Rezultanta \bar{G} a forțelor \bar{G}_i este aplicată în centrul acestor forțe. Centrul forțelor \bar{G}_i este, prin definiție, centrul de greutate al sistemului de puncte materiale. Poziția lui este dată de vectorul de poziție [v. cap IV, § 10, formula (4.25)]

$$\bar{p} = \frac{\sum G_i \bar{r}_i}{\sum G_i} \quad (5.4)$$

Dar

$$G_i = m_i g$$

și relația (5.4) devine

$$\bar{p} = \frac{\sum m_i g \bar{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{g \sum m_i \bar{r}_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} \quad (5.5)$$

Coordonatele centrului de greutate vor fi

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \quad (5.6)$$

§ 3. Centrul maselor. Analizînd formulele (5.5) și (5.6) se poate trage concluzia că poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale depinde exclusiv de distribuția maselor m_i . Deci, centrul de greutate poate fi considerat ca un element *geometric* al sistemului de puncte materiale și ar putea fi definit independent de greutatea punctelor materiale care alcătuiesc sistemul, ca fiind punctul al cărui vector de poziție este dat de (5.5)

$$\bar{p} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}$$

În modul acesta se ajunge la o noțiune mai cuprinzătoare, aceea de *centru al maselor*, care are sens (spre deosebire de centrul de greutate) chiar la corpuri care nu sînt situate la suprafața Pămîntului. Astfel, se poate vorbi de centrul maselor în cazul sistemului solar; folosirea denumirii de centru de greutate ar fi improprie pentru acest din urmă caz.

§ 4. Proprietățile centrului de greutate. a) Centrul de greutate se găsește în interiorul oricărei suprafețe convexe (σ) care conține în interiorul ei toate punctele sistemului.

Intr-adevăr să considerăm planul (Π) tangent suprafeței (σ) într-un punct oarecare P . Suprafața (σ) fiind convexă se găsește în întregime de

aceeași parte a planului (Π). Să alegem un sistem de axe astfel încît planul xOy să coincidă cu planul (Π) iar sensul pozitiv al axei Oz să fie către regiunea din spațiu în care se găsește suprafața (σ). Atunci cotele z_i ale tuturor punctelor sistemului sînt pozitive. Rezultă $\sum m_i z_i > 0$ și $\zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} > 0$, deci centrul de greutate al sistemului se află de aceeași parte a planului tangent ca și suprafața (σ). Cum punctul P este un punct oarecare pe suprafața (σ) rezultă că centrul de greutate trebuie să se găsească în interiorul suprafeței.

b) Dacă punctele unui sistem se află pe o linie dreaptă, centrul de greutate se află pe acea dreaptă. Într-adevăr, considerînd un sistem de axe a cărui axă Ox coincide cu dreapta dată, rezultă $y_i = 0$, $z_i = 0$, deci $\sum m_i y_i = 0$, $\sum m_i z_i = 0$ și prin urmare $\eta = 0$ și $\zeta = 0$, ceea ce justifică afirmația.

c) Dacă punctele unui sistem se află într-un plan, centrul de greutate al sistemului se află în acel plan. Într-adevăr, considerînd un triedru ale cărui axe Ox și Oy să fie în planul dat, rezultă $z_i = 0$ deci $\sum m_i z_i = 0$ și $\zeta = 0$, ceea ce justifică afirmația făcută.

d) Dacă un sistem de puncte materiale admite un plan (Π) diametral conjugat în raport cu o direcție (Δ), centrul de greutate se găsește în planul (Π). Un sistem de puncte materiale admite un plan diametral conjugat unei direcții dacă se bucură de proprietatea că la fiecare punct P_i de masă m_i corespunde întotdeauna un punct P_j de aceeași masă, astfel încît dreapta $P_i P_j$ este paralelă cu (Δ) și mijlocul segmentului $P_i P_j$ se află în planul (Π).

În particular, dacă direcția (Δ) este normală pe planul (Π) acesta din urmă poartă numele de plan de simetrie.

Să demonstrăm acum teorema. Pentru aceasta să presupunem un triedru $Oxyz$ avînd axele Ox și Oy în planul (Π). Față de planul (Π) punctele sistemului se împart în trei grupe:

- Puncte P_i situate de o parte a planului (Π) pentru care $z_i > 0$.
- Puncte P_j situate de partea cealaltă a planului (Π) pentru care $z_j < 0$.
- Puncte P_k situate, eventual, chiar în planul (Π) pentru care $z_k = 0$.

Dat fiind caracterul particular al sistemului rezultă $z_i = -z_j$ și $m_i = m_j$. Atunci, pentru întregul sistem

$$\sum m_i z_i = \sum m_i z_i + \sum m_j z_j + \sum m_k z_k = \sum m_i z_i - \sum m_i z_i = 0$$

căci $\sum m_j z_j = -\sum m_i z_i$, iar $\sum m_k z_k = 0$. Rezultă atunci $\zeta = 0$ ceea ce justifică teorema.

e) Dacă un sistem de puncte materiale admite o axă de simetrie (sau un centru de simetrie), centrul de greutate al sistemului se află pe acea axă (respectiv în acel centru). Într-adevăr să presupunem că Oz este axa de simetrie. Se înțelege prin aceasta că la un punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i corespunde întotdeauna un punct $P_j(-x_i, -y_i, z_i)$ de aceeași masă m_i . Urmindu-se calea de la punctul d) se poate arăta că $\sum m_i x_i = 0$, și $\sum m_i y_i = 0$, deci $\xi = \eta = 0$ ceea ce justifică teorema.

În cazul cînd sistemul are un centru de simetrie vom presupune că originea triedrului de referință se află în acest punct. Din condiția de sime-

trie rezultă că la un punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i corespunde un punct $P_j(-x_i, -y_i, -z_i)$ de aceeași masă m_i . Procedînd analog ca mai sus se deduce în acest caz $\sum m_i x_i = 0$, $\sum m_i y_i = 0$, $\sum m_i z_i = 0$ deci $\xi = \eta = \zeta = 0$ ceea ce justifică teorema.

f) Dacă un sistem de puncte materiale (S) se compune dintr-un număr p de sisteme $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$ ale căror mase M_1, M_2, \dots, M_p și centre de greutate C_1, C_2, \dots, C_p se cunosc, poziția centrului său de greutate se poate determina cu formula

$$\bar{\rho} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 + M_2 \bar{\rho}_2 + \dots + M_p \bar{\rho}_p}{M_1 + M_2 + \dots + M_p} \quad (5.7)$$

Într-adevăr, pentru sistemele $(S_1), (S_2), \dots, (S_p)$ rezultă relațiile

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_2)} m_i}, \quad \dots, \quad \bar{\rho}_p = \frac{\sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_p)} m_i},$$

care mai pot fi scrise

$$\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{\rho}_1, \quad \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{\rho}_2, \quad \dots, \quad \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i = M_p \bar{\rho}_p.$$

Apoi pentru sistemul (S)

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i + \dots + \sum_{(S_p)} m_i} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 + M_2 \bar{\rho}_2 + \dots + M_p \bar{\rho}_p}{M_1 + M_2 + \dots + M_p},$$

astfel încît teorema este demonstrată.

g) Dacă un sistem de puncte materiale (S) poate fi considerat ca rezultînd dintr-un sistem (S_1) din care lipsește un sistem (S_2) și dacă se cunosc masele M_1 și M_2 și centrele de greutate C_1 și C_2 ale acestor două sisteme, atunci vectorul de poziție al centrului de greutate C al sistemului (S) se poate determina cu formula

$$\bar{\rho} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2} \quad (5.8)$$

Demonstrația este analogă celei de la punctul precedent. Referitor la sistemele (S_1) și (S_2) putem scrie

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i} \quad \text{și} \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_2)} m_i},$$

relații care mai pot fi scrise încă:

$$\sum_{(S_i)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{\rho}_1, \quad \sum_{(S_i)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{\rho}_2.$$

Apoi, pentru sistemul (S)

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{(\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S)} m_i \bar{r}_i) - \sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{(\sum_{(S)} m_i + \sum_{(S)} m_i) - \sum_{(S)} m_i} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i - \sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i - \sum_{(S)} m_i} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2}.$$

§ 5. **Moment static.** Se numește moment static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan (Π) suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și distanțele de la aceste puncte la planul (Π).

Planul (Π) împarte spațiul în două semispații. Se convine ca distanțele de la punctele sistemului la planul (Π) să fie socotite *pozitive*, atunci când punctele se află într-unul dintre semispații și *negative* când se află în celălalt semispațiu.

Dacă se consideră planele formate de axele de coordonate Ox , Oy , Oz atunci sumele

$$\sum m_i x_i, \quad \sum m_i y_i, \quad \sum m_i z_i$$

reprezintă momentele statice ale sistemului de puncte materiale respectiv în raport cu planele yOz , zOx , xOy .

Din formulele (5.6) care dau coordonatele centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale deducem

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i x_i &= \xi \sum m_i = M \cdot \xi \\ \sum m_i y_i &= M \eta \\ \sum m_i z_i &= M \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Aceste relații permit formularea teoremei generale a momentelor statice:

Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa întregului sistem și distanța de la centrul de greutate al sistemului la acel plan.

Observație. Rezultă din această teoremă că pentru calculul momentelor statice, un sistem de puncte materiale poate fi redus la un punct material, centrul de greutate, în care s-a concentrat întreaga masă a sistemului.

O consecință a teoremei momentelor statice este următoarea:

Dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este nul, centrul de greutate al sistemului se găsește în acel plan.

Într-adevăr momentul static fiind egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul de greutate al sistemului la plan, cum masa sistemului nu este nulă, rezultă că distanța este nulă, adică centrul de greutate se găsește în plan.

În cazul cînd sistemul de puncte materiale este plan se definește ca moment static în raport cu o axă din plan, suma produselor dintre masele punctelor materiale ale sistemului și distanțele lor la axă. Axa împarte planul în două semiplane. Se convine ca distanțele să fie socotite pozitive cînd punctele sistemului se găsesc într-unul din semiplane și negative cînd se găsesc în celălalt semiplan. Dacă planul în care se găsește sistemul de puncte materiale este planul xOy , atunci sumele $\sum m_i x_i$ și $\sum m_i y_i$ reprezintă momentele statice în raport cu axele Oy și respectiv Ox .

Teorema enunțată pentru cazul sistemelor spațiale se regăsește și în cazul sistemelor plane sub forma: *momentul static al unui sistem plan de puncte materiale în raport cu o axă din planul sistemului este egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul de greutate al sistemului la acea dreaptă.*

De asemenea corolarul ei:

dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu o dreaptă din planul său este nul, centrul de greutate al sistemului se găsește pe acea dreaptă.

Demonstrațiile sînt analoge.

§ 6. Centrele de greutate ale corpurilor. Un corp material poate fi conceput ca un sistem cu foarte multe puncte materiale. Mai comod pentru calcule este să se folosească conceptul de *mediu continuu*. În baza acestui concept se admite că nu există în interiorul unui corp nici un volum, oricît de mic, în care să nu se găsească materie. Să considerăm un volum foarte mic Δv_i din corp și să notăm cu Δm_i masa sa. Centrul de greutate al acestui volum C_i este situat în interiorul său. Să notăm cu \bar{r}_i vectorul lui de poziție. Vectorul de poziție al centrului de greutate al întregului corp este

$$\bar{r} = \frac{\sum \bar{r}_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i}.$$

Făcînd pe Δv_i să tindă către zero și Δm_i va tinde către zero, iar numărul volumelor va tinde către ∞ ; atunci sumele $\sum \bar{r}_i \Delta m_i$ și $\sum \Delta m_i$ vor tinde respectiv către $\int \bar{r} dm$ și $\int dm$, integralele fiind extinse la întregul corp. Prin urmare

$$\bar{r} = \frac{\int \bar{r} dm}{\int dm}. \quad (5.10)$$

Coordonatele centrului de greutate vor fi

$$\xi = \frac{\int x dm}{\int dm}, \quad \eta = \frac{\int y dm}{\int dm}, \quad \zeta = \frac{\int z dm}{\int dm}. \quad (5.11)$$

§ 7. Masă specifică. Corpuri omogene. Centre de greutate geometrice. Să considerăm volumul foarte mic Δv_i a cărui masă am notat-o cu Δm_i și raportul

$$\frac{\Delta m_i}{\Delta v_i}.$$

Vom numi acest raport *densitate medie* sau *masă specifică medie* a volumului Δv_i . Să facem acum $\Delta v_i \rightarrow 0$. Atunci și $\Delta m_i \rightarrow 0$ și raportul de mai înainte va tinde în general către o valoare limită pe care o notăm cu

$$\mu = \frac{dm}{dv} \quad (5.12)$$

și o numim *densitate* sau *masă specifică a corpului* în punctul considerat. Mărimea μ definită de relația (5.12) are întotdeauna o valoare finită și pozitivă.

Cunoscând legea de variație a masei specifice $\mu = \mu(x, y, z)$ în interiorul unui corp se poate calcula masa sa cu formula

$$M = \int dm = \int \mu dv. \quad (5.13)$$

În cazul cînd densitatea μ este aceeași în toate punctele unui corp se zice că acel corp este *omogen*, de exemplu un corp executat din același material. În cazul unui corp omogen vectorul de poziție al centrului de greutate este dat de expresia

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r} \mu dv}{\int \mu dv} = \frac{\mu \int \bar{r} dv}{\mu \int dv} = \frac{\int \bar{r} dv}{\int dv}. \quad (5.14)$$

Coordonatele sale sînt date de formulele

$$\bar{\xi} = \frac{\int x dv}{\int dv}, \quad \bar{\eta} = \frac{\int y dv}{\int dv}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\int z dv}{\int dv}. \quad (5.15)$$

În cazul cînd corpul are una dintre dimensiuni — grosimea — foarte mică în raport cu celelalte două, se numește *placă*. În cazul plăcilor se ia în considerație *densitatea superficială* sau *masă specifică superficială* într-un punct, definită ca limita către care tinde raportul dintre masa Δm_i și suprafața ΔA_i a unui element de placă, cînd $\Delta A_i \rightarrow 0$, adică

$$\mu' = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i} = \frac{dm}{dA}. \quad (5.16)$$

Ca și mai înainte, cunoașterea legii de variație a densității superficiale permite să se determine masa M a plăcii cu formula

$$M = \int \mu' dA. \quad (5.17)$$

În cazul cînd $\mu' = \text{const}$, placa se zice *omogenă*. Aceasta se realizează de exemplu în cazul unei plăci executate din același material și avînd gro-

sime uniformă. Poziția centrului de greutate este determinată atunci prin vectorul

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r} dA}{\int dA}, \quad (5.18)$$

iar coordonatele sale sînt

$$\xi = \frac{\int x dA}{\int dA}, \quad \eta = \frac{\int y dA}{\int dA}, \quad \zeta = \frac{\int z dA}{\int dA}. \quad (5.19)$$

În cazul cînd corpul material este o bară (sau un fir), adică secțiunea sa transversală are dimensiuni neglijabile în raport cu lungimea, se definește densitatea liniară sau masa specifică liniară într-un punct ca fiind limita raportului dintre masa Δm_i și lungimea Δs_i a unui element de bară

$$\mu'' = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta s_i} = \frac{dm}{ds}. \quad (5.20)$$

Cunoscînd legea de variație a densității liniare în lungul barei $\mu'' = \mu''(s)$ se poate calcula masa barei cu formula

$$M = \int \mu'' ds. \quad (5.21)$$

În cazul cînd $\mu'' = \text{const}$, bara se zice omogenă: de exemplu cazul unei bare executate din același material și avînd secțiunea transversală constantă. În cazul barelor omogene poziția centrului de greutate este determinată prin vectorul de poziție

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r} ds}{\int ds}, \quad (5.22)$$

iar coordonatele sale sînt date de formulele

$$\xi = \frac{\int x ds}{\int ds}, \quad \eta = \frac{\int y ds}{\int ds}, \quad \zeta = \frac{\int z ds}{\int ds}. \quad (5.23)$$

Analizînd formulele (5.14), (5.18) și (5.22) valabile respectiv pentru corpuri omogene, plăci omogene și bare omogene se constată că în ele nu intervine masa corpului, ci volume, arii și lungimi. În modul acesta se ajunge la noțiunea de *centru de greutate geometric*.

În multe probleme apar aceste centre de greutate geometrice. Legătura cu centrul de greutate al unui corp este aceea că poziția centrului de greutate geometric coincide cu aceea a centrului de greutate al unui corp, plăci sau bare omogene. Centrul de greutate geometric poate fi definit însă și ca atare, adică prin formulele (5.14), (5.18), (5.22).

Aplicații. 1°. *Bară rectilinie omogenă.* Mijlocul barei este centrul de simetrie, deci centrul de greutate, trebuînd să coincidă cu centrul de simetrie, va fi la mijlocul barei.

2°. *Bară omogenă în formă de arc de cerc* (fig. 5.1). Notăm unghiul la centru al arcului cu 2α și raza cu R . Alegem ca axă Ox bisectoarea unghiului, iar axa Oy în planul arcului.

Bara fiind plană $\zeta=0$. Axa Ox fiind axă de simetrie $\eta=0$. Pentru determinarea abscisei ξ se aplică formula (5.23)

$$\xi = \frac{\int x ds}{\int ds}.$$

Elementul de arc $ds=R d\theta$, iar $x=R \cos \theta$. Rezultă

$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta} = \frac{R \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

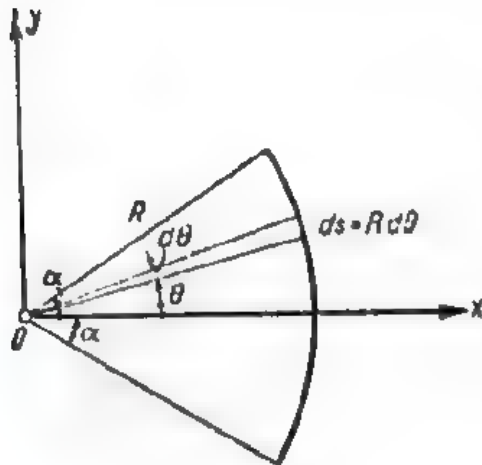


Fig. 5.1

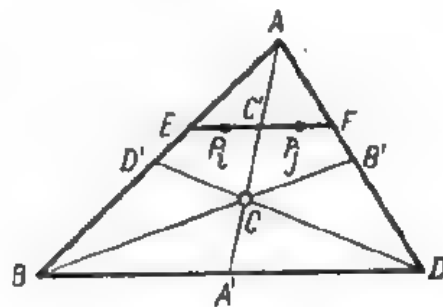


Fig. 5.2

3°. *Placă omogenă dreptunghiulară*. punctul de intersecție al diagonalelor este centrul de simetrie pentru dreptunghi. Deci centrul de greutate al unei plăci omogene dreptunghiulare este în punctul de intersecție al diagonalelor.

4°. *Placă omogenă triunghiulară* (fig. 5.2). Placa are trei plane diametral conjugate direcțiilor laturilor triunghiului și anume planele care conțin medianele triunghiului.

Într-adevăr fie (II) unul dintre plane, care conține de exemplu mediana AA' . Fie EF un segment de dreaptă paralel cu BD . Acest segment este împărțit în două părți egale de mediana AA' . Rezultă $EC'=C'F$. Oricărui punct P_i de pe segmentul EC' îi corespunde un punct P_j pe segmentul $C'F$ de aceeași masă și astfel încât $P_i P_j \parallel BD$ și $P_i C' = C' P_j$. Planul II este deci un plan diametral conjugat direcției BD .

Centrul de greutate al plăcii va trebui să se găsească deci în planul (II). Pentru că placa triunghiulară este plană, centrul de greutate trebuie să se găsească în planul ABD , deci pe mediana AA' . Utilizând același raționament pentru celelalte două plane diametrle, se ajunge la concluzia că centrul de greutate al unei plăci omogene triunghiulare este la intersecția medianelor sale.

5°. *Placă omogenă în formă de sector circular*. Notăm unghiul la centru cu 2α și raza cu R (fig. 5.3). Bisectoarea unghiului este axă de simetrie. O alegem ca axă Ox , axa Oy fiind în planul figurii. Rezultă $\zeta=0$, $\eta=0$ iar pentru ξ folosim formula (5.19)

$$\xi = \frac{\int x dA}{\int dA}.$$

Folosind coordonatele polare $x=\rho \cos \theta$ și $dA=\rho d\rho d\theta$ încît

$$\xi = \frac{\iint \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta}{\iint \rho d\rho d\theta} = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_0^R \rho d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{\frac{R^3}{3} \cdot 2 \sin \alpha}{\frac{R^2}{2} \cdot 2\alpha} = \frac{2 R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

În cazul unui semicerc $\alpha=\frac{\pi}{2}$ și rezultă

$$\xi = \frac{4 R}{3\pi}.$$

6°. *Placă omogenă sferică.* Să considerăm o porțiune $ABCD$ dintr-o sferă de rază R mărginită de două cercuri meridiene și de două cercuri paralele. Vom presupune că unul dintre meridiane este chiar în planul xOz (fig. 5.4), ceea ce nu particularizează problema. Vom aplica formulele (5.19) observând că, dacă se folosesc drept coordonate longitudinea θ și latitudinea φ , atunci

$$x = R \cos \varphi \cos \theta, \quad y = R \cos \varphi \sin \theta; \quad z = R \sin \varphi \quad \text{și} \quad dA = R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

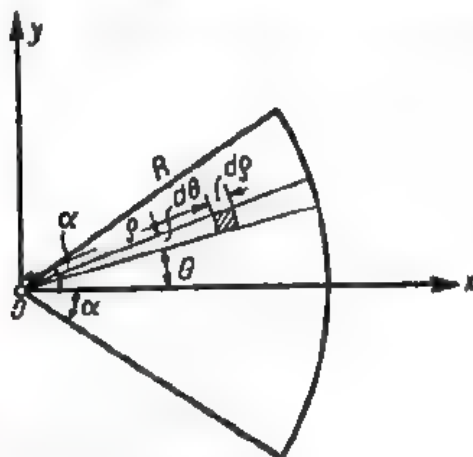


Fig. 5.3

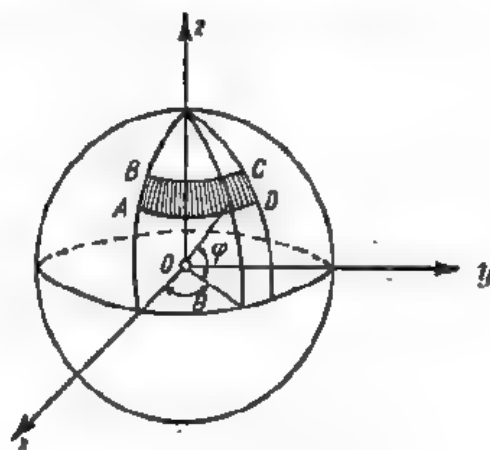


Fig. 5.4

Formulele (5.19) devin

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int x \, dA}{\int dA} = \frac{\iint R^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta}{\iint R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta} = R \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^\theta \cos \theta \, d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\theta d\theta} = \\ &= \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin \theta \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right]}{\theta (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \\ \eta &= \frac{\int y \, dA}{\int dA} = \frac{\iint R^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta}{\iint R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta} = R \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^\theta \sin \theta \, d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\theta d\theta} = \\ &= \frac{R}{2} \cdot \frac{(1 - \cos \theta) \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right]}{\theta (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \\ \zeta &= \frac{\int z \, dA}{\int dA} = \frac{\iint R^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta}{\iint R^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta} = R \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\theta d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\theta d\theta} = \\ &= \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} = \frac{R}{2} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

Dând valori particulare limitelor de integrare θ , φ_1 și φ_2 obținem cazul diferitelor plăci sferice. Pentru $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ obținem un octant sferic, mărginit de ecuator și de două meridiane. Aplicând formulele de mai sus, coordonatele centrului său de greutate vor fi

$$\xi = \frac{R}{2}, \quad \eta = \frac{R}{2}, \quad \zeta = \frac{R}{2}.$$

adică centrul de greutate se va găsi pe intersecția celor trei plane bisectoare ale diedrelor unghiului solid corespunzător octantului la distanța $R\sqrt{3}/2$ de centrul sferei.

Pentru $\theta=2\pi$ se obține o zonă sferică. Coordonatele centrului ei de greutate vor fi

$$\xi=0, \eta=0, \zeta=\frac{R}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2),$$

adică centrul de greutate se află pe axa de simetrie (Oz) la mijlocul înălțimii zonei.

7°. Corp omogen semisferic (fig. 5.5). Având o axă de simetrie Oz , rezultă $\xi=\eta=0$. Cota ζ se calculează cu formula (5.15) în care ținem seama că, folosind coordonatele sferice ρ, θ, φ , avem

$$x=\rho \sin \varphi, \quad dv=\rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Limitele de integrare sînt $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Atunci

$$\zeta = \frac{\int x \, dv}{\int dv} = \frac{\iiint \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi} = \frac{\int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\int_0^R \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi} = \frac{3R}{8}.$$

§ 8. Centrele de greutate ale figurilor compuse. În cazurile practice se pune adesea problema determinării centrului de greutate al unei figuri care poate fi descompusă în două sau mai multe figuri simple, ale căror centre de greutate se cunosc. Se poate arăta că în acest caz nu este necesar să se utilizeze calculul integral, ci se pot folosi rezultatele deja obținute pentru figurile simple componente.

Într-adevăr, așa cum s-a arătat (§ 5) momentul static al unui corp nu se modifică, dacă acesta se înlocuiește cu centrul său de greutate, în care s-a concentrat întreaga masă a corpului.

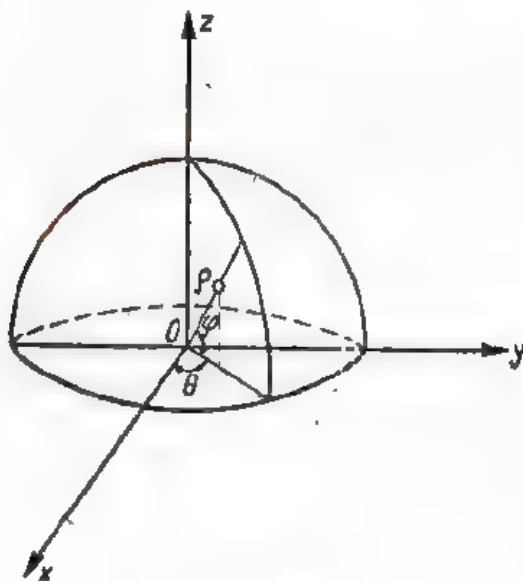


Fig. 5.5

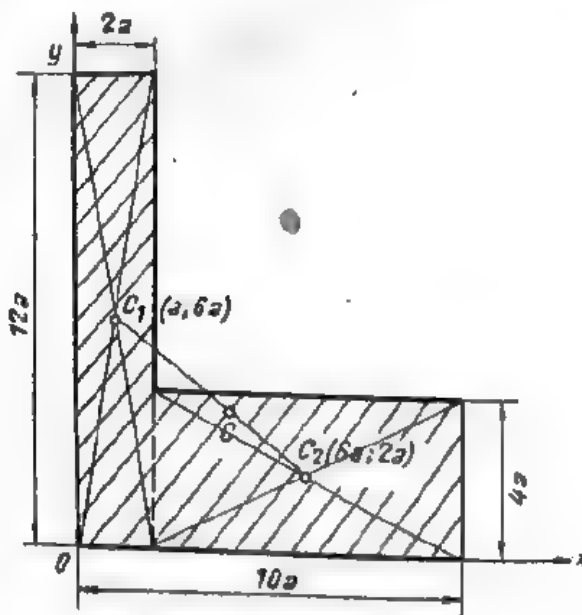


Fig. 5.6

De aici rezultă următorul procedeu practic pentru determinarea centrului de greutate al unei figuri compuse: se descompune această figură în figuri simple. În centrul de greutate al fiecărei figuri se concentrează masa

ei. Se obține astfel un sistem de puncte materiale. Centrul de greutate al acestui sistem coincide cu centrul de greutate al figurii compuse.

În cazul când figura compusă rezultă prin eliminarea unei figuri simple, atunci în centrul de greutate al acesteia se va concentra o masă negativă egală cu masa figuri simple.

A p l i c a ț i i. 8°. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene avînd forma și dimensiunile din fig. 5.6.

R e z o l v a r e. Placa poate fi descompusă în două plăci dreptunghiulare, ale căror centre de greutate C_1 și C_2 se cunosc. În raport cu sistemul de axe ales, coordonatele acestor centre de greutate sînt $C_1(a; 6a)$ și $C_2(6a; 2a)$. Ariile celor două plăci dreptunghiulare sînt $A_1=2a \times 12a=24a^2$ și $A_2=8a \times 4a=32a^2$. Rezultă atunci următoarele coordonate pentru centrul de greutate al întregii figuri:

$$\xi = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{24 a^2 a + 32 a^2 \cdot 6 a}{24 a^2 + 32 a^2} \approx 3,86 a,$$

$$\eta = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{24 a^2 \cdot 6 a + 32 a^2 \cdot 2 a}{24 a^2 + 32 a^2} \approx 3,71 a.$$

9°. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene avînd forma și dimensiunile din fig. 5.7.

R e z o l v a r e. Placa se compune dintr-o placă semicirculară de rază $2a$ căreia i se alipește o placă semicirculară de rază a și din care se scoate o placă semicirculară de rază a . Centrul de greutate al unei plăci semicirculare se află pe axa de simetrie la distanța $OC = \frac{4R}{3\pi}$ de centrul O al cercului din care face parte semicercul (vezi aplicația 18).

Folosind acest rezultat, deducem cu ușurință coordonatele centrelor de greutate C_1 , C_2 , C_3 ale celor trei semicercuri în raport cu sistemul de axe xOy și anume

$$C_1\left(2a, \frac{8a}{3\pi}\right), C_2\left(3a, -\frac{4a}{3\pi}\right), C_3\left(a, \frac{4a}{3\pi}\right).$$

Ariile respective vor fi

$$A_1 = \frac{\pi(2a)^2}{2} = 2\pi a^2, A_2 = \frac{\pi a^2}{2}, A_3 = -\frac{\pi a^2}{2}.$$

Aria A_3 s-a luat cu semnul minus, deoarece acest semicerc lipsește. Obținem pentru coordonatele centrului de greutate al plăcii hașurate

$$\xi = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{2\pi a^2 \cdot 2a + \frac{\pi a^2}{2} \cdot 3a - \frac{\pi a^2}{2} \cdot a}{2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2}} = \frac{5a}{2} = 2,5a,$$

$$\eta = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$\frac{2\pi a^2 \cdot \frac{8a}{3\pi} + \frac{\pi a^2}{2} \cdot \left(-\frac{4a}{3\pi}\right) + \left(-\frac{\pi a^2}{2}\right) \cdot \frac{4a}{3\pi}}{2\pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} a \approx 0,64 a.$$

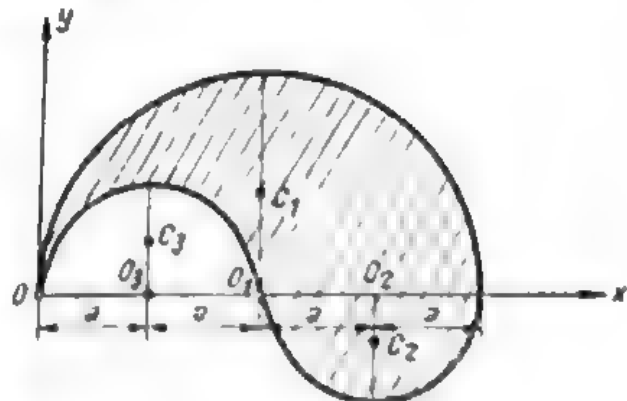


Fig. 5.7

§ 9. Teoremele Guldin-Pappus. Teorema 1. Aria suprafeței generate de un arc de curbă plană care se rotește în jurul unei axe din planul curbei, arcul fiind situat în întregime de aceeași parte a axei, este egală cu lungimea

arcului de curbă multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei date, presupuse omogene.

Să raportăm arcul de curbă la sistemul de axe Oxy , axa Ox fiind axă de rotație (fig. 5.8). Vom presupune $y=f(x)$ ecuația curbei, $f(x)$ fiind o funcție uniformă în intervalul (a, b) . Un element de arc $MM'=\Delta s$ al curbei,

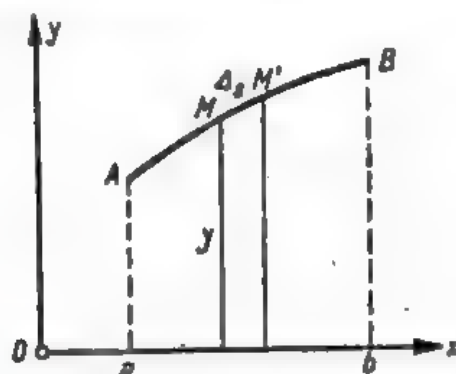


Fig. 5.8

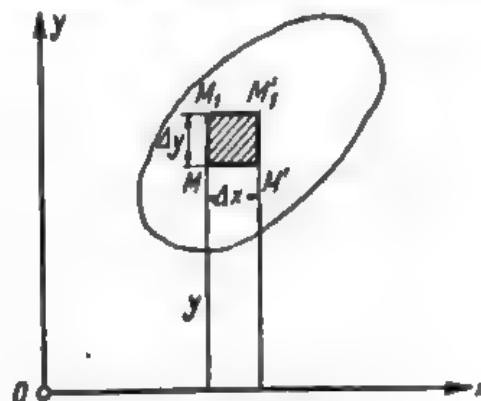


Fig. 5.9

generează prin rotație o suprafață care poate fi asimilată cu suprafața laterală a unui trunchi de con având generatoarea ds și raza medie y . Rezultă aria:

$$\Delta A = 2\pi y \Delta s$$

și

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum \Delta A = 2\pi \int y ds.$$

Dar $\int y ds = \eta l$, unde l este lungimea arcului de curbă dat, deci

$$A = 2\pi \eta l. \quad (5.24)$$

Teorema a II-a. Volumul generat prin rotirea unei arii plane în jurul unei axe din planul ei, aria fiind în întregime situată de aceeași parte a axei, este egal cu aria considerată, multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă.

Să considerăm aria A mărginită de o curbă închisă raportată la axele Ox și Oy , axa Ox fiind axă de rotație. Presupunem curba situată de partea ordonatelor y pozitive (fig. 5.9).

Volumul Δv generat prin rotirea elementului de arie $MM'M_1M_1'$ în jurul axei Ox rezultă din diferența volumelor generate de doi cilindri având înălțimea Δx și razele y și $y + \Delta y$.

Rezultă

$$\Delta v = \pi(y + \Delta y)^2 \Delta x - \pi y^2 \Delta x = 2\pi y \Delta x \Delta y + \pi \Delta y^2 \Delta x = 2\pi y \Delta A + \pi \Delta y^2 \Delta x.$$

Atunci

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum \Delta v = \int 2\pi y dA = 2\pi \int y dA.$$

Dar

$$\int y dA = \eta \cdot A,$$

incît

$$V = 2\pi \eta \cdot A. \quad (5.25)$$

Observație. Teoremele Guldin-Pappus rămân valabile și cind rotația se face cu un unghi $\alpha < 2\pi$, în care caz formulele (5.24) și (5.25) devin respectiv (α în radiani)

$$A = \alpha \cdot \eta \cdot l \text{ și } V = \alpha \cdot \eta \cdot A.$$

Aceste teoreme servesc fie la determinarea arilor și volumelor, fie la determinarea centrelor de greutate.

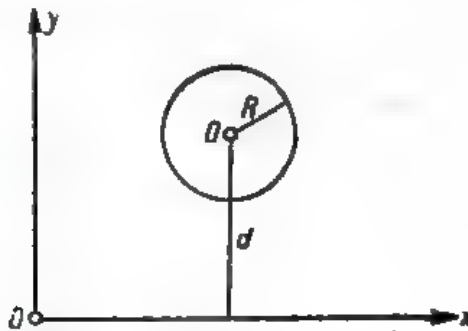


Fig. 5.10

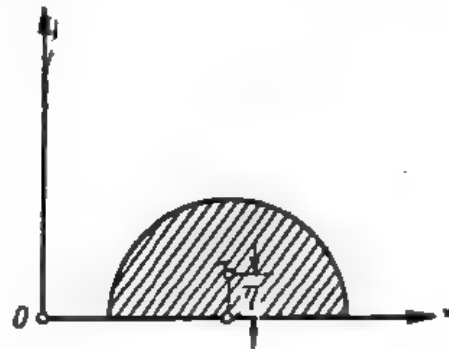


Fig. 5.11

Aplicații. 10°. Să se determine aria și volumul unui tor generat prin rotația unui cerc de rază R în jurul unei axe din planul său situată la distanța d ($d > R$) de centrul cercului (fig. 5.10). Aplicând formulele lui Guldin, obținem

$$A = 2\pi d \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R d, \quad V = 2\pi d \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^2 d.$$

11°. Să se găsească poziția centrului de greutate al suprafeței unui semicerc (fig. 5.11). Prin rotire în jurul axei Ox semicercul generează o sferă. Volumul sferei se cunoaște: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Aria semicercului este $A = \frac{\pi R^2}{2}$. Din a doua teoremă a lui Guldin deducem

$$\eta = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

VI. SOLIDUL RIGID LIBER

§ 1. Condițiile de echilibru ale unui sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid liber. S-a văzut că dacă un sistem de forțe, acționând asupra unui solid rigid liber, are într-un punct din spațiu $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_O = 0$, sistemul este echivalent cu zero.

Se înțelege prin solid rigid liber un solid rigid care poate ocupa orice poziție în spațiu. Poziția pe care o ocupă este determinată de sistemul de forțe.

În cap. IV (§ 6) s-a arătat că dacă un sistem de forțe are $\vec{R} = 0$ și $\vec{M}_O = 0$, el este echivalent cu zero. Deci condiția $\vec{R} = 0$, $\vec{M}_O = 0$ este suficientă pentru echilibru.

În Dinamică se arată că această condiție este și necesară.

Rezultă următoarea teoremă: *condiția necesară și suficientă ca un sistem de forțe, acționând asupra unui solid rigid liber să fie în echilibru este ca, într-un punct arbitrar din spațiu*

$$\bar{R}=0 \text{ și } \bar{M}_O=0. \quad (6.1)$$

Observație. Punctul în care se scrie condiția (6.1) este arbitrar, căci dacă este îndeplinită într-un punct din spațiu, condiția este îndeplinită în orice alt punct din spațiu [cap. IV, (4.5)].

§ 2. **Ecuatiile scalare de echilibru.** Proiectând pe axele de coordonate ecuațiile vectoriale (6.1) se obțin șase ecuații scalare

$$X=0, Y=0, Z=0,$$

$$M_x=0, M_y=0, M_z=0.$$

Cum însă

$$X=\sum X_i, Y=\sum Y_i, Z=\sum Z_i$$

$$M_x=\sum (y_i Z_i - z_i Y_i), M_y=\sum (z_i X_i - x_i Z_i), M_z=\sum (x_i Y_i - y_i X_i).$$

Condițiile de echilibru se scriu

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \sum Y_i = 0, \sum Z_i = 0, \\ \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) &= 0, \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

În cazul sistemelor particulare de forțe numărul ecuațiilor de echilibru se reduce.

În cazul *sistemelor de forțe plane*, presupunând că planul în care acționează forțele este planul xOy , rezultă că $Z_i=0$, $z_i=0$ și trei dintre ecuațiile (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn trei ecuații de echilibru și anume:

$$\sum X_i=0, \sum Y_i=0, \sum (x_i Y_i - y_i X_i)=0, \quad (6.3)$$

adică două ecuații de proiecție în raport cu axele din plan și o ecuație de momente în raport cu axa normală pe plan.

În cazul *sistemelor de cupluri* primele trei ecuații din sistemul (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn trei ecuații scalare

$$\sum (y_i Z_i - z_i Y_i)=0, \sum (z_i X_i - x_i Z_i)=0, \sum (x_i Y_i - y_i X_i)=0, \quad (6.4)$$

adică ecuațiile de momente în raport cu trei axe.

În cazul sistemelor de forțe paralele, de exemplu cu axa Ox , rezultă $Y_i=0$, $Z_i=0$ și trei dintre ecuațiile (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn numai trei ecuații

$$\sum X_i=0, \sum z_i X_i=0, \sum y_i X_i=0, \quad (6.5)$$

adică o ecuație de proiecție pe direcția forțelor și două ecuații de momente în raport cu axele normale pe direcția forțelor.

§ 3. **Ecuatiile de echilibru în coordonate omogene.** Fie $X, Y, Z, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$ cele șase componente scalare ale torsorului unui sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid și u, v, w, l, m, n coordonatele

omogene (plükeriene) ale unei drepte. Condiția ca momentul resultant al sistemului de forțe în raport cu această dreaptă să fie nul se scrie [v. cap. I, § 39, formula (1.116) și Observația 1]

$$uM_{Ox} + vM_{Oy} + wM_{Oz} + lX + mY + nZ = 0. \quad (6.6)$$

Sub această formă, condițiile de echilibru (6.2) apar toate ca ecuații de momente în raport cu șase drepte, dintre care trei sînt la distanță finită (axele Ox , Oy , și Oz) și trei la distanță infinită (dreptele de la infinit ale planelor yOz , zOx , xOy). Într-adevăr, coordonatele plükeriene ale acestor șase drepte sînt

$$Ox: u=\text{arbitrar}, v=0, w=0, l=0, m=0, n=0;$$

$$Oy: u=0, v=\text{arbitrar}, w=0, l=0, m=0, n=0;$$

$$Oz: u=0, v=0, w=\text{arbitrar}, l=0, m=0, n=0;$$

$$D_{\infty}(yOz): u=0, v=0, w=0, l=\text{arbitrar}, m=0, n=0;$$

$$D_{\infty}(zOx): u=0, v=0, w=0, l=0, m=\text{arbitrar}, n=0;$$

$$D_{\infty}(xOy): u=0, v=0, w=0, l=0, m=0, n=\text{arbitrar}.$$

Aceste coordonate, înlocuite pe rînd în (6.6), reproduc condițiile de echilibru (6.2). *Așadar, ecuațiile de proiecție sînt echivalente cu ecuațiile de momente scrise în raport cu drepte de la infinit ale spațiului, deci un caz particular de ecuații de momente.*

Este atunci firesc să ne întrebăm dacă nu există posibilitatea să poată fi exprimate condițiile de echilibru ale unui sistem de forțe prin șase ecuații de momente scrise în raport cu șase drepte oarecare. Notînd cu $u_1, v_1, w_1, l_1, m_1, n_1, \dots, u_6, v_6, w_6, l_6, m_6, n_6$ coordonatele omogene ale celor șase drepte, ecuațiile de momente devin

$$\left. \begin{aligned} u_1M_{Ox} + v_1M_{Oy} + w_1M_{Oz} + l_1X + m_1Y + n_1Z &= 0, \\ u_2M_{Ox} + v_2M_{Oy} + w_2M_{Oz} + l_2X + m_2Y + n_2Z &= 0, \\ u_3M_{Ox} + v_3M_{Oy} + w_3M_{Oz} + l_3X + m_3Y + n_3Z &= 0, \\ u_4M_{Ox} + v_4M_{Oy} + w_4M_{Oz} + l_4X + m_4Y + n_4Z &= 0, \\ u_5M_{Ox} + v_5M_{Oy} + w_5M_{Oz} + l_5X + m_5Y + n_5Z &= 0, \\ u_6M_{Ox} + v_6M_{Oy} + w_6M_{Oz} + l_6X + m_6Y + n_6Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Pentru ca sistemul de ecuații (6.7) să fie echivalent cu condițiile (6.2), va trebui ca el să nu admită decît soluțiile banale $X=0, Y=0, Z=0, M_{Ox}=0, M_{Oy}=0, M_{Oz}=0$. Pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul format cu coeficienții necunoscutelor, respectiv cu coordonatele omogene ale celor șase drepte, să fie diferit de zero, adică

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 & l_4 & m_4 & n_4 \\ u_5 & v_5 & w_5 & l_5 & m_5 & n_5 \\ u_6 & v_6 & w_6 & l_6 & m_6 & n_6 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6.8)$$

Folosind noțiunile corespunzătoare din teoria mulțimilor de drepte vom spune că este necesar și suficient ca mulțimea celor șase drepte să fie de rang 6. Dacă rangul mulțimii acestor drepte este 5, $\Delta=0$ și ecuațiile de momente (6.7) nu mai condiționează echilibrul. În acest caz se știe că cele șase drepte aparțin aceluiași complex de gradul întâi (v. cap I, § 42). Aceasta ne permite să formulăm o condiție negativă privitoare la configurația celor șase drepte și anume: *Condiția necesară și suficientă ca ecuațiile de momente în raport cu șase drepte să conducă la echilibrul unui sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid liber este ca aceste drepte să nu aparțină aceluiași complex de gradul întâi.*

Practic, nu este necesar totdeauna să se examineze configurația celor șase drepte. Este suficient să se constate de exemplu că cinci dintre drepte alcătuiesc o mulțime de rang 4, respectiv că aparțin aceleiași congruențe de gradul întâi, sau că patru dintre drepte alcătuiesc o mulțime de rang 3, respectiv că aparțin aceleiași serii de drepte sau că trei dintre drepte alcătuiesc o mulțime de rang 2, respectiv că aparțin aceluiași fascicul plan sau, în sfârșit, că două dintre drepte alcătuiesc o mulțime de rang 1, respectiv că sînt confundate. În aceste cazuri este sigur că totalitatea celor șase drepte aparțin aceluiași complex de gradul întâi, deoarece, în oricare din situațiile de mai înainte, există cel puțin o combinație liniară cu coeficienți diferiți de zero între elementele liniilor determinantului Δ , combinație care este identic nulă, fapt care atrage evident, anularea determinantului.

Pentru practică prezintă interes în special cazurile particulare de configurații de drepte (complexe, congruențe, serii, fascicule) care au fost analizate la capitolul I, § 42 și tabela 1. Aici menționăm rezultatele obținute, adaptîndu-le la problema care face obiectul acestui paragraf.

Ecuațiile de momente în raport cu șase axe nu sînt independente, deci nu condiționează echilibrul unui sistem de forțe dacă:

- a) *trei dintre ele sînt concurente și coplanare în același timp;*
- b) *trei dintre ele sînt paralele și coplanare în același timp;*
- c) *două dintre ele sînt paralele și o a treia este dreaptă de la infinit a planului determinat de primele două. Folosind observația cu privire la echivalența dintre o ecuație de proiecție și o ecuație de momente în raport cu o dreaptă de la infinit, vom trage concluzia că ecuația de proiecție pe o direcție este o consecință a ecuațiilor de momente în raport cu două axe paralele dintr-un plan normal pe acea direcție;*

- d) *trei dintre ele sînt drepte de la infinit concurente. Folosind aceeași echivalență dintre o ecuație de momente față de o dreaptă de la infinit și o ecuație de proiecție, conchidem că într-un același plan nu se pot scrie trei ecuații de proiecție independente;*

- e) *patru dintre ele sînt concurente în spațiu;*
- f) *patru dintre ele sînt paralele în spațiu;*
- g) *trei dintre ele sînt paralele și necoplanare, iar a patra este una din dreptele de la infinit ale spațiului, paralelă cu primele trei. Folosind echivalența dintre o ecuație de momente în raport cu o dreaptă de la infinit și o ecuație de proiecție, conchidem că o ecuație de proiecție pe o direcție oarecare*

dintr-un plan este o consecință a ecuațiilor de momente scrise în raport cu trei axe necoplanare, normale pe plan;

h) două dintre ele sînt paralele, iar celelalte două sînt drepte de la infinit ale spațiului, paralele cu primele două. Folosind aceeași echivalență ca la punctul precedent, conchidem că dat fiind un plan, nu se pot scrie două ecuații de proiecție pe două direcții din plan și două ecuații de momente în raport cu două axe normale pe plan, toate patru independente între ele;

i) patru dintre ele sînt coplanare;

j) trei dintre ele sînt coplanare și a patra este dreapta de la infinit a primelor trei. Folosind echivalența de la punctul c) conchidem că ecuația de proiecție pe o direcție normală la un plan este consecința ecuațiilor de momente scrise în raport cu trei drepte oarecare din acel plan;

k) patru dintre ele sînt drepte de la infinit ale spațiului. Folosind echivalența de la punctul c) conchidem că nu se pot scrie patru ecuații de proiecție distincte;

l) patru dintre ele sînt generatoare din aceeași familie a unei cuadrice riglate;

m) cinci dintre ele întîlnesc două drepte date;

n) cinci dintre ele întîlnesc o aceeași dreaptă și sînt în același timp paralele cu un plan;

p) cele șase axe întîlnesc o aceeași dreaptă;

q) trei dintre ele sînt concurente într-un punct și celelalte trei sînt concurente în alt punct;

r) trei dintre ele sînt concurente într-un punct și celelalte trei sînt paralele;

s) trei dintre ele sînt paralele cu o direcție și celelalte trei sînt paralele cu o altă direcție;

t) toate șase sînt paralele cu un același plan (normale pe aceeași direcție).

Cazuri particulare importante.

Forțe plane. În cazul forțelor plane se folosesc de obicei ecuațiile de momente în raport cu trei axe normale pe planul forțelor sau, ceea ce este același lucru, momentele în raport cu trei puncte A , B , C , din planul forțelor. Rezultă următoarele restricții pentru cele trei puncte:

— punctele A , B și C nu trebuie să fie coliniare;

— dacă se scriu numai două ecuații de momente în raport cu punctele A și B și o ecuație de proiecție, direcția pe care se proiectează trebuie să fie diferită de normala la AB ;

— nu se pot scrie trei ecuații de proiecție.

Forțe paralele. În acest caz se obișnuiește a se scrie ecuații de momente în raport cu trei axe dintr-un plan normal pe direcția forțelor. Rezultă următoarele restricții:

— axele nu trebuie să fie concurente;

— axele nu trebuie să fie paralele;

— dacă se scriu două ecuații de momente și o ecuație de proiecție pe direcția forțelor, axele nu trebuie să fie paralele;

— nu se poate scrie mai mult decît o ecuație de proiecție.

§ 4. Condiții pentru configurația suporturilor forțelor unui sistem în echilibru. În cazul unui sistem cu $n=1, \dots, 6$, forțe, echilibrul nu este în general posibil decît dacă suporturile forțelor au o anumită configurație.

Într-adevăr dacă se consideră cele șase ecuații scalare de echilibru și se presupune ca necunoscute scalarii forțelor, sistemul astfel obținut fiind omogen, nu admite soluții diferite de zero decât dacă matricea coeficienților necunoscutelor are un rang mai mic decât numărul forțelor. Aceasta atrage o serie de condiții pentru acești coeficienți, respectiv pentru configurația suporturilor celor n forțe. Într-adevăr coeficienții necunoscutelor sînt coordonate omogene ale celor n suporturi, căci ecuațiile de echilibru se pot scrie, de exemplu în funcție de cosinusurile directe $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ale suporturilor forțelor și de coordonatele x , y , z ale punctelor lor de aplicație sub forma

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n &= 0, \\ F_1 \cos \beta_1 + F_2 \cos \beta_2 + \dots + F_n \cos \beta_n &= 0, \\ F_1 \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + \dots + F_n \cos \gamma_n &= 0, \\ F_1(z_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \gamma_1) + F_2(z_2 \cos \alpha_2 - x_2 \cos \gamma_2) + \\ &+ \dots + F_n(z_n \cos \alpha_n - x_n \cos \gamma_n) = 0, \\ F_1(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) + F_2(x_2 \cos \beta_2 - y_2 \cos \alpha_2) + \\ &+ \dots + F_n(x_n \cos \beta_n - y_n \cos \alpha_n) = 0, \\ F_1(y_1 \cos \gamma_1 - z_1 \cos \beta_1) + F_2(y_2 \cos \gamma_2 - z_2 \cos \beta_2) + \\ &+ \dots + F_n(y_n \cos \gamma_n - z_n \cos \beta_n) = 0. \end{aligned} \right\} (6.9)$$

În general observăm că

$$(\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i, (z_i \cos \alpha_i - x_i \cos \gamma_i), (x_i \cos \beta_i - y_i \cos \alpha_i), (y_i \cos \gamma_i - z_i \cos \beta_i))$$

constituie un sistem de coordonate omogene pentru suportul forței F_i , coordonate pe care le notăm cu

$$u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i.$$

Sistemul (6.9) poate fi transcris, cu aceste notații sub forma

$$\left. \begin{aligned} F_1 u_1 + F_2 u_2 + \dots + F_n u_n &= 0, \\ F_1 v_1 + F_2 v_2 + \dots + F_n v_n &= 0, \\ F_1 w_1 + F_2 w_2 + \dots + F_n w_n &= 0, \\ F_1 l_1 + F_2 l_2 + \dots + F_n l_n &= 0, \\ F_1 m_1 + F_2 m_2 + \dots + F_n m_n &= 0, \\ F_1 n_1 + F_2 n_2 + \dots + F_n n_n &= 0. \end{aligned} \right\} (6.10)$$

În sistemul (6.10) s-a presupus $n < 6$. Pentru ca sistemul să admită soluții diferite de zero pentru necunoscutele F_1, \dots, F_n este necesar și suficient ca rangul matricii

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ n_1 & n_2 & \dots & n_n \end{vmatrix} \quad (6.11)$$

să fie cel mult egal cu $(n-1)$, deci cele n drepte trebuie să aparțină unei mulțimi liniare de rang cel mult $r=n-1$ (v. cap. I, § 42).

Aplicând teoria mulțimilor liniare de drepte (v. cap. I, § 42 și tabela 1) tragem următoarele concluzii:

a) Un sistem alcătuit dintr-o singură forță nu se poate găsi în echilibru, deoarece pentru $n=1$, rezultă $r=0$ (mulțimea vidă).

b) Pentru ca un sistem de două forțe acționând asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca forțele să aibă același suport, deoarece pentru $n=2$ rezultă $r=1$ (mulțimea dreptelor confundate). În plus, vom constata că, deoarece rezultanta lor trebuie să fie nulă, forțele trebuie să fie egale în modul și opuse.

c) Pentru ca un sistem de trei forțe acționând asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forțelor să fie concurente și coplanare sau paralele și coplanare, deoarece pentru $n=3$ rezultă $r=2$ (mulțimea dreptelor unui fascicul plan).

d) Pentru ca un sistem de patru forțe acționând asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forțelor să fie concurente în spațiu, sau paralele în spațiu, sau să fie generatoare din aceeași familie ale unei cuadrice riglate, sau, în general, să aparțină aceleiași serii liniare de drepte, deoarece pentru $n=4$, $r=3$ (mulțimea dreptelor dintr-o serie liniară).

e) Pentru ca un sistem de cinci forțe acționând asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forțelor să aparțină aceleiași congruențe de gradul întâi, în particular, de exemplu să întâlnească două drepte date sau să întâlnească o dreaptă și să fie în același timp paralele cu un plan dat.

f) Pentru ca un sistem de șase forțe acționând asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forțelor să aparțină aceleiași complex de gradul întâi, în particular, de exemplu să întâlnească o aceeași dreaptă sau să fie paralele cu un același plan.

§ 5. Problemele staticii solidului rigid liber. Acestea pot fi grupate în două categorii:

a) Probleme în care se cunosc forțele care acționează asupra solidului și se cere să se determine poziția lui de echilibru.

b) Probleme în care se cunoaște poziția de echilibru și se cere să se determine forțele care acționează asupra solidului.

Pentru rezolvarea acestor probleme dispunem de ecuațiile (6.2), deci de șase ecuații scalare. Pentru ca o asemenea problemă să poată fi rezolvată, este necesar ca ea să nu aibă mai mult de șase necunoscute scalare. Condiția aceasta nu este suficientă, căci este posibil ca un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute să fie nedeterminat sau imposibil.

O problemă din prima categorie are șase necunoscute. Într-adevăr, pentru a fixa poziția unui solid este suficient să se fixeze pozițiile P_1, P_2, P_3 pe care le ocupă în spațiu trei puncte A_1, A_2 și A_3 necoliniare ale lui. Va trebui deci să se cunoască de exemplu coordonatele carteziene (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) și (x_3, y_3, z_3) ale punctelor P_1, P_2 și P_3 față de un triedru $Oxyz$. Coordonatele acestor puncte nu pot fi însă arbitrare. Dat fiind că solidul

este rigid, distanțele dintre punctele din spațiu P_1 , P_2 și P_3 trebuie să fie egale cu distanțele dintre punctele corpului A_1 , A_2 și A_3 adică

$$P_1P_2=A_1A_2, P_2P_3=A_2A_3, P_3P_1=A_3A_1.$$

Scriind aceste relații în funcție de coordonatele punctelor P_1 , P_2 și P_3 obținem

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} &= A_1A_2 \\ \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2} &= A_2A_3 \\ \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2} &= A_3A_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Relațiile (6.12) arată că numai șase dintre cele nouă coordonate sînt independente. Se spune că *un solid rigid liber are șase grade de libertate*¹. Pentru determinarea celor șase necunoscute independente dispunem, așa cum s-a văzut, de șase ecuații deci, în general, problemele din prima categorie sînt determinate.

Problemele din a doua categorie sînt în general determinate dacă numărul necunoscutelor scalare necesare pentru aflarea forțelor este cel mult șase.

În cazul sistemelor de forțe plane avem trei ecuații scalare de echilibru, date de (6.3): solidul rigid cu un plan fix are trei grade de libertate. Într-adevăr, pentru a determina poziția unui asemenea solid este suficient să i se fixeze două puncte A_1 și A_2 în două puncte P_1 și P_2 din spațiu. Punctele P_1 și P_2 trebuind să fie într-un plan, pentru definirea lor este nevoie de patru coordonate (x_1, y_1) și (x_2, y_2) . Deoarece distanța dintre punctele P_1 și P_2 trebuie să fie egală cu distanța dintre punctele A_1 și A_2 rezultă

$$P_1P_2=A_1A_2 \text{ sau } \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=A_1A_2. \quad (6.13)$$

Între cele patru coordonate existînd o relație, numai trei dintre ele sînt independente. Un rigid cu un plan fix are, deci, trei grade de libertate. Pentru determinarea lor dispunem de trei ecuații de echilibru. Deci și în acest caz problemele din prima categorie sînt în general determinate.

Problemele din a doua categorie pot fi, în general, rezolvate dacă nu comportă determinarea a mai mult de trei necunoscute scalare.

VII. STATICA SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

A. SOLIDUL RIGID SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARĂ

§ 1. *Legături.* Ecuațiile (6.2) au fost stabilite pentru un solid rigid liber, adică pentru un solid care poate ocupa orice poziție în spațiu. Sub acțiunea forțelor, el ar putea ocupa o anumită poziție de echilibru. Această

¹ Aceste șase grade de libertate pot fi, de exemplu, coordonatele unui punct O al rigidului și unghiurile lui Euler corespunzătoare (v. cap. XXVIII, § 2).

poziție însă este determinată exclusiv de sistemul de forțe, nu și de alte condiții geometrice, cum ar fi de exemplu obligația unui punct al solidului de a rămâne pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix din spațiu, sau obligația ca două puncte ale solidului să rămână fixe (solidul cu o axă fixă) etc.

O problemă de echilibru a unui solid rigid supus la legături se rezolvă folosind aceeași axiomă a legăturilor (principiul forțelor de legătură) în virtutea căreia fiecare legătură geometrică poate fi înlocuită cu o forță, numită *forță de legătură* sau *reațiune*.

Se ajunge astfel la situația unui solid rigid liber acționat de două sisteme de forțe:

- a) forțele exterioare, care acționează asupra solidului rigid,
- b) forțele de legătură.

Să notăm cu (\bar{R}, \bar{M}_O) tursorul forțelor aplicate în raport cu un punct O și cu (\bar{R}, \bar{M}_O) tursorul reacțiunilor în raport cu același punct. Solidul rigid putând fi considerat liber, condiția sa de echilibru se scrie:

$$\bar{R} + \bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O + \bar{M}_O = 0. \quad (7.1)$$

Ecuatiile sînt echivalente cu șase ecuații scalare. O problemă de echilibru al unui solid rigid supus la legături, care are mai mult de șase necunoscute scalare este în general nedeterminată: fie că există o infinitate de poziții de echilibru, fie că există o infinitate de valori posibile pentru forțele de legătură, fie ambele posibilități.

§ 2. Reazemul simplu. Să presupunem că singura legătură a unui solid rigid constă în aceea că un punct al său A_1 este obligat să rămână pe o suprafață fixă lucie. Se spune că în punctul A_1 este un *reazem simplu* sau un *reazem mobil*.

Pentru determinarea poziției de echilibru a unui asemenea solid sînt necesari cinci parametri. Într-adevăr, în acest caz pe lângă relațiile (6.12) coordonatele punctului P_1 din spațiu cu care coincide A_1 trebuie să satisfacă și ecuația suprafeței $f(x, y, z) = 0$, pe care este obligat să rămână, deci

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (7.2)$$

Relațiile (6.12) și (7.2) reprezintă în total patru relații între nouă coordonate, deci numai cinci coordonate sînt independente. *Deci, un reazem simplu suprimă unui solid rigid un grad de libertate.*

În virtutea axiomei legăturilor, un reazem simplu poate fi înlocuit cu o reacțiune normală pe suprafața de sprijin, așa cum s-a arătat în statica punctului material obligat să rămână pe o suprafață lucie.

Dacă se cunoaște poziția de echilibru a solidului rigid, deci și coordonatele punctului P_1 , direcția reacțiunii fiind cunoscută (normală la suprafață), pentru completa determinare a ei este nevoie să se afle o singură necunoscută: *scalarul reacțiunii*.

În cazul unui sistem de forțe plane, se spune că un solid rigid este simplu rezemat într-un punct P_1 , dacă punctul P_1 al solidului este obligat să rămână pe o curbă din planul forțelor.

Se poate arăta și în acest caz că un reazem simplu suprimă solidului un grad de libertate. Într-adevăr la ecuația (6.13) se adaugă în acest caz ecuația

$$f(x_1, y_1) = 0 \quad (7.3)$$

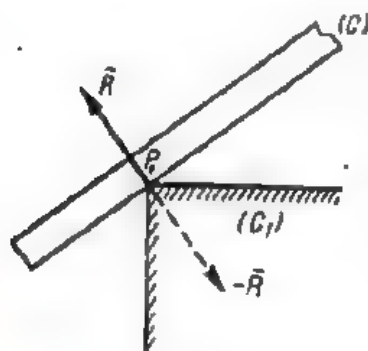


Fig. 7.1

care exprimă obligația ca punctul P_1 să rămână pe curbă. În total există două relații între patru coordonate, deci numai două dintre ele sînt independente. Solidul a pierdut deci un grad de libertate.

Se poate arăta de asemenea că determinarea reacțiunii echivalează cu găsirea unei necunoscute: scalarul ei; într-adevăr direcția ei trebuie să fie în planul forțelor și normală la curbă, deci este cunoscută.

Observații. 1°. Dacă suprafața de sprijin are în P_1 un punct singular, atunci reacțiunea are direcția normalei la suprafața corpului (C) (fig. 7.1). Aceasta rezultă imediat dacă se aplică principiul acțiunii și reacțiunii considerînd că există două corpuri (C) și (C₁) care se sprijină unul pe altul și observînd că acțiunea ($-\bar{R}$) trebuie să fie normală pe suprafața care mărginește corpul (C). Aceeași direcție trebuie să o aibă și reacțiunea \bar{R} .

2°. Dacă un reazem simplu suprimă unui corp un grad de libertate, rezultă că pentru a imobiliza un solid rigid este nevoie de șase reazeme în cazul general și de trei reazeme în cazul forțelor plane.

Nu însă întotdeauna un solid rigid poate fi imobilizat în modul acesta. Să cercetăm ce condiții trebuie să îndeplinească cele șase reazeme ale unui solid rigid pentru a-l imobiliza față de orice sistem de forțe.

Să considerăm un rigid avînd șase reazeme simple și să notăm cu N_1, N_2, \dots, N_6 scalarii reacțiunilor normale, cu $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i (i=1, 2, \dots, 6)$ coordonatele plükeriene ale versorilor acestor reacțiuni (cap. I, § 42) și cu $X, Y, Z, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$ proiecțiile rezultantei și ale momentului resultant al forțelor date. Ecuațiile de echilibru ale rigidului se vor scrie:

$$\left. \begin{aligned} N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + X &= 0 \\ N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 + Y &= 0 \\ N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4 + N_5 w_5 + N_6 w_6 + Z &= 0 \\ N_1 l_1 + N_2 l_2 + N_3 l_3 + N_4 l_4 + N_5 l_5 + N_6 l_6 + M_{Ox} &= 0 \\ N_1 m_1 + N_2 m_2 + N_3 m_3 + N_4 m_4 + N_5 m_5 + N_6 m_6 + M_{Oy} &= 0 \\ N_1 n_1 + N_2 n_2 + N_3 n_3 + N_4 n_4 + N_5 n_5 + N_6 n_6 + M_{Oz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar și suficient ca matricea formată cu coeficienții necunoscuților să aibă același rang cu matricea formată cu coeficienții necunoscuților și cu termenii liberi, $X, Y, Z, M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$. Pentru ca aceste două matrici să aibă același rang, oricare ar fi

sistemul de forțe date, deci oricare ar fi termenii liberi, este necesar și suficient ca matricea formată cu coeficienții necunoscutelor

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

să aibă rangul 6. Utilizînd rezultatele de la cap. I, § 65 și tabela 1, rezultă următoarele condiții negative pentru suporturile celor șase reacțiuni:

- suporturile a două reacțiuni nu trebuie să coincidă;
- suporturile a trei reacțiuni nu trebuie să fie coplanare și concurente sau coplanare și paralele;
- suporturile a patru reacțiuni nu trebuie să fie concurente, paralele, sau să aparțină aceleiași familii de generatoare a unui hiperboloid cu o pînză;
- suporturile a cinci reacțiuni nu trebuie să întîlnească două drepte sau să întîlnească o dreaptă și să fie paralele cu un plan și în general să nu aparțină unei congruențe de gradul I;
- suporturile a șase reacțiuni nu trebuie să întîlnească aceeași dreaptă, să fie paralele cu același plan și, în general, să aparțină aceluiași complex liniar de gradul I.

În cazul cînd una dintre aceste condiții nu este îndeplinită sistemul de ecuații (7.4) nu mai este în general compatibil, respectiv rigidul nu mai este imobilizat. Pentru anumite sisteme de forțe, rigidul ar putea fi imobilizat de cele șase reazeme, dar, în acest din urmă caz, rangul matricii (7.5) fiind mai mic decît 6, sistemul de ecuații (7.4) este nedeterminat. Dacă se consideră o poziție infinit vecină și dacă în această poziție rangul matricii (7.5) continuă să fie inferior lui 6, se spune că rigidul nu este imobilizat; dacă rangul matricii (7.5) în poziția infinit vecină este 6, atunci imobilizarea rigidului este realizată numai pentru mișcări infinitezimale, nu și pentru deplasări finite. Se zice că legăturile rigidului sînt critice sau că rigidul nu este strict imobilizat.

§ 3. Articulația. Să presupunem că singura legătură a unui solid rigid este obligația de a avea un punct al său A_1 într-un punct fix P_1 din spațiu. Se zice că solidul rigid are în A_1 o articulație sferică.

Pentru determinarea poziției de echilibru a unui asemenea solid sînt necesari trei parametri. Într-adevăr, în acest caz pe lîngă ecuațiile (6.12) coordonatele punctului P_1 din spațiu cu care coincide A_1 trebuie să satisfacă și ecuațiile

$$x_1=a, \quad y_1=b, \quad z_1=c, \quad (7.6)$$

unde a , b , și c sînt trei constante. Relațiile (6.12) și (7.6) alcătuiesc în total șase ecuații între nouă coordonate. Rezultă că numai trei dintre ele sînt independente.

Deci, o articulație sferică suprimă unui solid trei grade de libertate.

O articulație sferică poate fi înlocuită cu o reacțiune de direcție necunoscută, așa cum s-a arătat în cazul punctului material obligat să ocupe o poziție fixă în spațiu [v. formula (3.15)].

O articulație introduce într-o problemă de statică trei necunoscute: proiecțiile reacțiunii pe trei direcții necoplanare, de exemplu pe axele Ox , Oy și Oz ale unui sistem de axe cartezian ortogonal.

În cazul cînd unui solid rigid acționat de un sistem de forțe plane i se imobilizează un punct P_1 din planul forțelor, se zice că solidul are în acest punct o articulație cilindrică. În acest caz pentru determinarea poziției de echilibru este necesar un singur parametru. Într-adevăr la ecuația (6.13) se adaugă în acest caz ecuațiile

$$x_1 = a, y_1 = b, \quad (7.7)$$

care exprimă obligația ca punctul P_1 să rămînă fix în plan. În total există deci trei relații între patru coordonate. O articulație cilindrică suprimă unui solid rigid două grade de libertate. O articulație cilindrică poate fi înlocuită cu o reacțiune al cărei suport este situat în planul forțelor și a cărei direcție este necunoscută.

O articulație cilindrică introduce într-o problemă de statică două necunoscute scalare: proiecțiile reacțiunii pe două direcții din planul forțelor, de exemplu pe axele Ox și Oy ale unui sistem de referință cartezian ortogonal.

Observații. 1°. O articulație sferică poate fi asimilată cu trei reazeme simple avînd suporturile reacțiunilor concurente și necoplanare, iar o articulație cilindrică, poate fi asimilată cu două reazeme simple avînd suporturile reacțiunilor în planul forțelor.

2°. În baza observației de mai înainte și a celor stabilite la § 2 se poate afirma că:

a) Un solid rigid nu poate fi imobilizat cu ajutorul a două articulații sferice pentru orice sistem de forțe, deoarece rangul mulțimii celor șase reacțiuni echivalente ar fi $r=5$, ele formînd două stele de drepte concurente (v. cap. I, § 42, tabela 1).

b) Un solid rigid nu poate fi imobilizat cu o articulație sferică și trei reazeme simple dacă suporturile reacțiunilor din reazeme sînt concurente sau paralele, sau dacă suportul uneia dintre cele trei reacțiuni din reazeme trece prin articulație, sau, în sfîrșit, dacă suporturile reacțiunilor din reazemele simple sînt întîlnite de o aceeași dreaptă care trece prin articulație.

c) Un solid rigid acționat de un sistem de forțe plane este imobilizat cu două articulații, dar problema este nedeterminată (patru necunoscute și trei ecuații de echilibru).

d) Un solid rigid acționat de un sistem de forțe plane nu este imobilizat cu o articulație și un reazem simplu dacă suportul reacțiunii din reazem trece prin articulație.

§ 4. Încăstrarea. Să presupunem o grindă rigidă care nu are altă legătură decît obligația ca una dintre extremități să fie fixată într-un masiv (fig. 7.2). Se zice că grinda este încăstrată la acea extremitate. O încăstrare suprimă corpului toate gradele sale de libertate. O grindă rigidă încăstrată este imobilă.

Să ne închipuim o secțiune $a-a$ făcută normal pe axa grinzii în dreptul încăstrării. Fiecare punct A_i al acestei secțiuni este fix. În virtutea axiomei legăturilor asupra sa acționează o forță de legătură \bar{p}_i de direcție necunoscută.

Determinarea forțelor \bar{p}_i nu poate fi făcută în mod unic cu ajutorul ecuațiilor mecanicii, din cauza numărului foarte mare al acestor forțe. Este nevoie de ipoteze suplimentare bazate pe deformarea corpurilor. În cadrul staticii ne vom mulțumi să determinăm numai torsorul forțelor \bar{p}_i , în raport cu un punct. Se obișnuiește să se aleagă ca punct de reducere centrul de greutate O al secțiunii din dreptul încăstrării. Fie \bar{r}_i vectorul de poziție al punctului A_i în care se aplică forța \bar{p}_i . Torsorul forțelor \bar{p}_i în O are componentele

$$\bar{R} = \Sigma \bar{p}_i, \quad \bar{M}_O = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{p}_i.$$

Dacă notăm cu (\bar{Q}, \bar{M}_O) torsorul forțelor care acționează asupra grinzii, calculat în raport cu punctul O , condițiile de echilibru se scriu

$$\bar{Q} + \bar{R} = 0, \quad \bar{M}_O + \bar{M}_O = 0. \quad (7.8)$$

Aceste ecuații permit determinarea torsorului forțelor \bar{p}_i .

Sistemul (7.8) este echivalent cu șase ecuații scalare în cazul general și cu trei ecuații scalare în cazul sistemelor de forțe plane.

O încăstrare introduce deci într-o problemă de statică șase necunoscute scalare ($R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$) în cazul unui sistem de forțe oarecare și trei necunoscute scalare (R_x, R_y, M) în cazul unui sistem de forțe plane.

Observații. 1°. O grindă încăstrată nu mai are nevoie de nici un alt reazem pentru a fi immobilizată. Dacă o grindă încăstrată mai are și alte reazeme, problema determinării reacțiunilor admite o infinitate de soluții.

2°. În afară de reazemele studiate, care sînt cele mai des folosite în tehnică, există multe altele. Orice alt mod de rezemare se poate obține ca o combinație a reazemelor de mai sus.

Astfel grinda din fig. 7.3 are la capătul din dreapta un mod de rezemare care, în plan vertical, se comportă ca o articulație, iar în plan orizontal ca o încăstrare plană. Rezultă că torsorul în centrul de greutate al secțiunii va avea patru componente R_x, R_y, R_z, M_z .

§ 5. Solidul cu o axă fixă. Să presupunem că immobilizăm două puncte O și O' ale unui solid rigid prin două articulații sferice. În acest caz se imobilizează axa OO' . Să alegem un sistem de referință solidar cu corpul avînd originea în O și axa Oz coincidînd cu axa fixă OO' (fig. 7.4).

În O și O' vor acționa două reacțiuni \bar{R} și \bar{R}' de direcții necunoscute. Dacă (\bar{Q}, \bar{M}_O) este torsorul forțelor aplicate solidului rigid, atunci condițiile de echilibru se scriu

$$\bar{Q} + \bar{R} + \bar{R}' = 0, \quad \bar{M}_O + \bar{M}_O(\bar{R}) + \bar{M}_O(\bar{R}') = 0. \quad (7.9)$$

Observăm că $\bar{M}_O(\bar{R}) = 0$ fiindcă reacțiunea \bar{R} este aplicată în O . Notînd $OO' = h$, cu X, Y, Z proiecțiile pe axe ale vectorului \bar{Q} și cu M_x, M_y, M_z

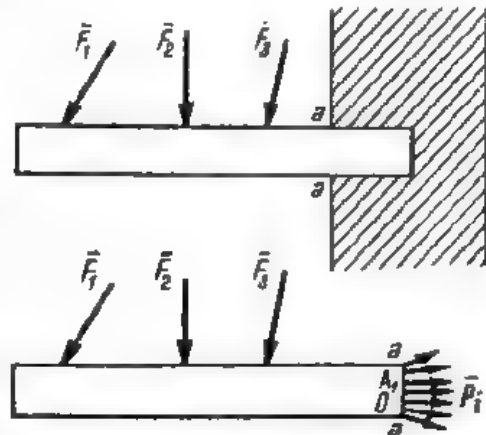


Fig. 7.2

proiecțiile pe axe ale vectorului \bar{M}_O , cu $R_x, R_y, R_z, R'_x, R'_y, R'_z$ proiecțiile vectorilor \bar{R} și \bar{R}' , sistemul de ecuații (7.9) este echivalent cu șase ecuații scalare

$$\left. \begin{aligned} X + R_x + R'_x &= 0, & M_x - R'_y h &= 0, \\ Y + R_y + R'_y &= 0, & M_y + R'_x h &= 0, \\ Z + R_z + R'_z &= 0, & M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Ultima ecuație este independentă de reacțiuni. Ea definește poziția de echilibru a solidului (de exemplu, din rezolvarea ei, poate rezulta valoarea unghiului θ format de axa Ox solidară cu corpul, cu o axă Ox_1 fixă din spațiu). După cum această ecuație este compatibilă și determinată, compatibilă și nedeterminată sau incompatibilă, solidul admite poziții de echilibru determinate, sau este în echilibru în orice poziție, sau în sfârșit, nu admite nici o asemenea poziție.

Presupunând că ultima ecuație este compatibilă, rămân pentru determinarea proiecțiilor reacțiunilor celelalte cinci ecuații. Este evident că sistemul de ecuații este nedeterminat, căci sînt șase proiecții de determinat. Din a patra și a cincea ecuație se pot deduce proiecțiile R'_x și R'_y , apoi din prima și a doua ecuație se pot deduce proiecțiile R_x și R_y . Rămîne o singură ecuație, a treia, care conține proiecțiile R_z și R'_z . Aceste proiecții rămîn astfel nedeterminate. Singura condiție se impune pentru suma lor

$$R_z + R'_z = -Z. \quad (7.11)$$

Aceste reacțiuni nu pot fi determinate dacă nu se renunță la ipoteza rigidității, căci dacă se presupune că printr-un mijloc oarecare ele ar putea

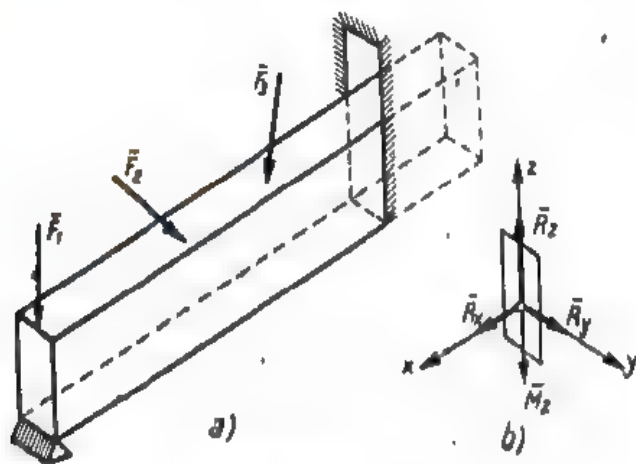


Fig. 7.3

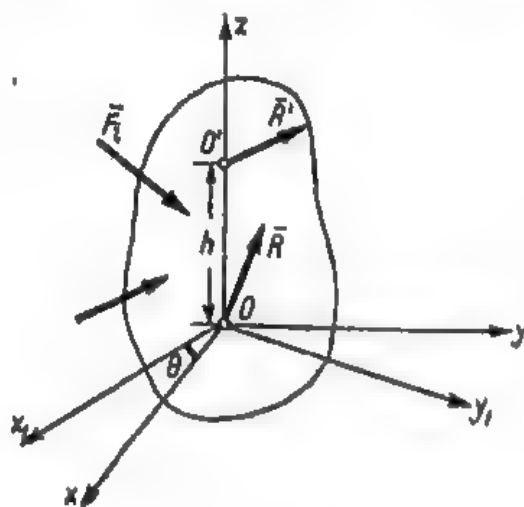


Fig. 7.4

fi totuși determinate, valorile obținute se modifică dacă în lungul axei Oz , în O și O' se introduc două forțe egale și de sens opus, deși acestea nu modifică evident, torsorul (\bar{R}, \bar{M}_O) .

Se spune că reacțiunile R_z și R'_z sînt static nedeterminate.

§ 6. Solidul rezemat pe un plan fix. Fie A_1, A_2, \dots, A_n , n puncte de reazem ale unui solid rigid pe un plan (Π) și (\bar{R}, \bar{M}_O) torsorul sistemului de forțe care acționează asupra solidului, reducerea făcându-se în raport cu un punct O din planul (Π) (fig. 7.5). Alegînd punctul O ca origine a unui sistem de axe de coordonate avînd Ox și Oy în planul (Π) și notînd ca de obicei cu X, Y, Z, M_x, M_y, M_z proiecțiile torsorului forțelor care acționează asupra solidului și cu \bar{R}_i una dintre reacțiuni care este normală la planul (Π) , ecuațiile de echilibru se scriu

$$\begin{aligned} \bar{R} + \sum \bar{R}_i &= 0, \\ \bar{M}_O + \sum \bar{M}_O(\bar{R}_i) &= 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

sau, proiectate pe axe,

$$\left. \begin{aligned} X &= 0, & Y &= 0, \\ Z + \sum R_i &= 0, \\ M_x + \sum y_i R_i &= 0, \\ M_y - \sum x_i R_i &= 0, & M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

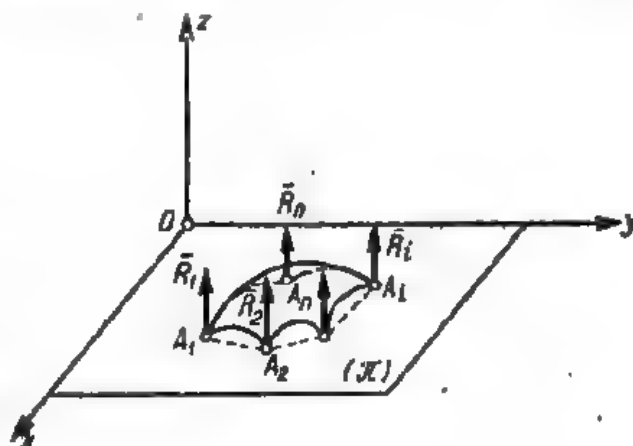


Fig. 7.5

Ecuațiile $X=0, Y=0, M_z=0$ în care nu apar reacțiunile R_i , reprezintă trei condiții pe care trebuie să le îndeplinească sistemul de forțe exterioare. Se recunoaște ușor că sistemul acestor forțe trebuie să se reducă la o forță unică, căci trinomial invariant

$$X M_x + Y M_y + Z M_z$$

este identic nul. Forța unică va avea valoarea Z și va fi normală pe planul (Π) . Pentru determinarea reacțiunilor rămîn ecuațiile

$$\begin{aligned} Z + \sum R_i &= 0, \\ M_x + \sum y_i R_i &= 0, \\ M_y - \sum x_i R_i &= 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Se observă că dacă numărul punctelor de sprijin este $n > 3$ problema este în general nedeterminată, deoarece numărul necunoscutelor este mai mare decît al ecuațiilor. Deci, un solid rigid sprijinit pe un plan fix în mai mult de trei puncte constituie un sistem static nedeterminat.

Dacă $n=3$ relațiile (7.12) devin

$$\left. \begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= -Z, \\ x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3 &= M_y, \\ y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3 &= -M_x. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Pentru ca sistemul să admită soluții determinate este necesar ca determinantul coeficienților necunoscutelor să fie diferit de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7.16)$$

Aceasta atrage după sine condiția ca *punctele de sprijin* A_1, A_2 și A_3 să nu fie coliniare.

În cazul cînd punctele A_1, A_2, \dots, A_n sînt coliniare putem presupune, fără a particulariza problema, că ele sînt situate pe axa Ox , adică $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. În acest caz condițiile de echilibru devin

$$\left. \begin{aligned} X=0, & \quad Y=0, & \quad Z+\sum R_i=0, \\ \mathcal{M}_x=0, & \quad \mathcal{M}_y-\sum x_i R_i=0, & \quad \mathcal{M}_z=0. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Rezultă că suportul forței unice la care se reduce sistemul de forțe trebuie să fie normal pe planul (Π) și să întâlnească axa Ox .

Ecuatiile care rămîn pentru determinarea reacțiunilor sînt

$$Z+\sum R_i=0, \quad \mathcal{M}_y-\sum x_i R_i=0. \quad (7.18)$$

Fiind numai două ecuații, rezultă că sistemul admite soluții determinate numai cînd $n=2$, adică numai cînd solidul rigid este sprijinit în două puncte.

Deci solidul rigid rezemat în mai mult de două puncte și avînd suporturile reacțiunilor coplanare și paralele reprezintă un sistem static nedeterminat.

Observație. Dacă se presupune că reazemele solidului rigid sînt legături unilaterale, cum se întîmplă de obicei, atunci mărimile R_i ale reacțiunilor în punctele A_i trebuie să fie toate pozitive

$$R_i > 0. \quad (7.19)$$

Aceste reacțiuni constituie un sistem de forțe paralele, deci rezultanta lor trece prin centrul acestor forțe, ale cărui coordonate sînt

$$\xi = \frac{\sum R_i x_i}{\sum R_i}, \quad \eta = \frac{\sum R_i y_i}{\sum R_i}, \quad \zeta = 0. \quad (7.20)$$

Cum $R_i > 0$, formulele (7.20) arată că abscisa ξ este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare valoare x_i , iar ordonata η este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare

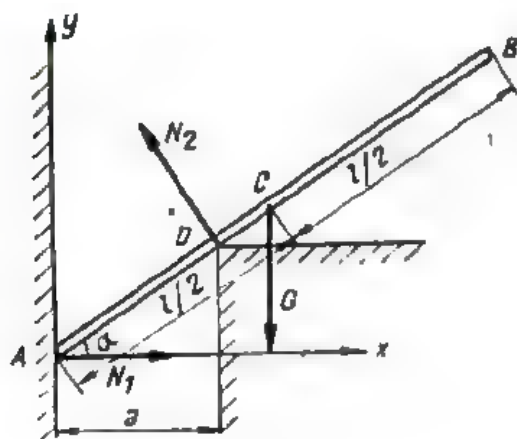


Fig. 7.6

valoare y_i . Centrul forțelor paralele \bar{R}_i se găsește deci într-un poligon convex care conține în interiorul sau pe conturul său punctele de sprijin A_i . Poligonul de arie minimă ce îndeplinește această condiție poartă numele de *poligon de sustentare*. Suportul rezultantelor forțelor exterioare trebuie să treacă prin centrul forțelor \bar{R}_i , deci trebuie să intersecteze planul (Π) în interiorul poligonului de sustentare.

În particular, dacă corpul este supus numai la greutatea proprie, iar planul (Π) este orizontal, verticala centrului de greutate trebuie să întâlnească planul (Π) într-un punct situat în interiorul poligonului de sustentare.

Aplicații. 1^o O bară omogenă, de lungime l și de greutate G se sprijină fără frecare în A pe un perete vertical și în D pe un colț (fig. 7.6). Cunoscut distanța a , se cere să se

determine, unghiul α corespunzător poziției de echilibru și modulele reacțiunilor din A și D .

Rezolvare. În A suprafața de sprijin este aceea a peretelui, verticală, deci suportul reacțiunii N_1 va fi orizontal. În D suprafața de sprijin este aceea a barei căci

peretele prezintă un colț (punct singular). Reacțiunea N_2 va fi normală pe bară. Scriind ecuațiile de proiecție pe direcțiile Ax și Ay și ecuația de momente în raport cu A , obținem

$$N_1 - N_2 \sin \alpha = 0, \quad N_2 \cos \alpha - G = 0, \quad N_2 \frac{a}{\cos \alpha} - G \frac{l}{2} \cos \alpha = 0.$$

Rezolvând acest sistem de ecuații, se găsește

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3 \cdot 2a}{l}}, \quad N_2 = G \sqrt{\frac{l}{2a}}, \quad N_1 = G \sqrt{\frac{l}{2a}} \sqrt{1 - \frac{3 \cdot 4a^2}{l^2}}.$$

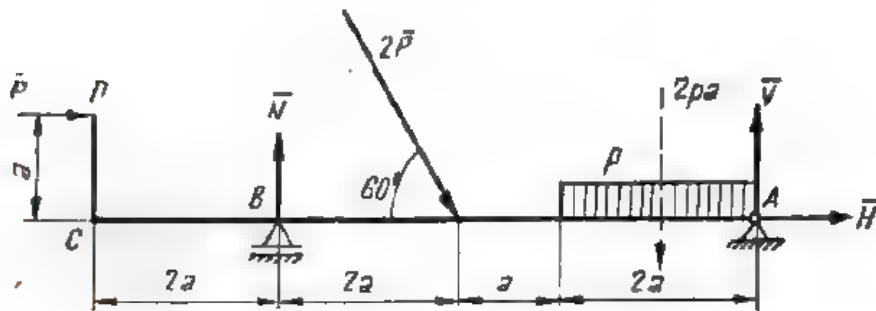


Fig. 7.7

2°. Să se determine reacțiunile din articulația A și din reazemul simplu B pentru grinda cotită $ABCD$ încărcată așa cum se arată în fig. 7.7. Discuție.

Rezolvare. Se înlocuiește reazemul simplu B prin reacțiunea normală N și articulația A prin reacțiunile H și V . Sarcina uniform distribuită se înlocuiește cu o sarcină concentrată $2pa$. Vom scrie o ecuație de proiecții pe direcția orizontală și ecuații de momente în raport cu punctele B și A . Obținem

$$\begin{aligned} P + 2P \cos 60^\circ + H &= 0, \\ V \cdot 5a - Pa - 2P \sin 60^\circ \cdot 2a - p \cdot 2a \cdot 4a &= 0, \\ -N \cdot 5a - Pa + 2P \sin 60^\circ \cdot 3a + p \cdot 2a \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații, se obține

$$H = -2P, \quad V \approx 0,892P + 1,6pa, \quad N \approx 0,838P + 0,4pa.$$

Discuție. Expresiile obținute pentru V și N sînt pozitive, deci sensurile indicate pe figură sînt cele reale. Scalarul reacțiunii H a rezultat negativ, deci sensul real este invers celui arătat în figură.

3°. Să se determine reacțiunile din încastrarea A a grinzii AB încărcată așa cum se arată în fig. 7.8.

Rezolvare. Se înlocuiește încastrarea cu reacțiunile H , V și momentul M . Vom înlocui și sarcina uniform distribuită p cu o sarcină concentrată echivalentă $3pa$ aplicată la mijlocul porțiunii încărcate. Proiectînd pe o direcție orizontală, apoi pe o direcție verticală și scriind o ecuație de momente în raport cu punctul A , se obține sistemul:

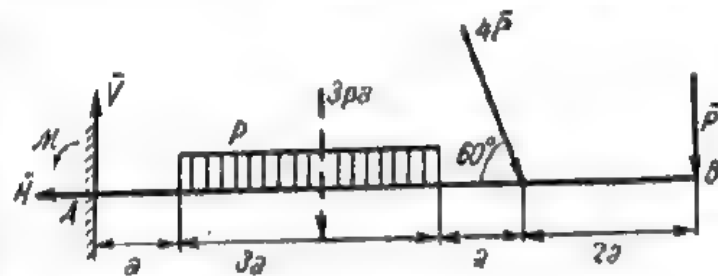


Fig. 7.8

$$\begin{aligned} -H + 4P \cos 60^\circ &= 0, \quad V - 3pa - 4P \sin 60^\circ - P = 0, \\ M - 3pa \cdot 2,5a - 4P \sin 60^\circ \cdot 8a - P \cdot 7a &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații se obține

$$H = 2P, \quad V \approx 4,46P + 3pa, \quad M = 23,4Pa + 7,5pa^2.$$

Deoarece scalarii reacțiunilor au rezultat pozitivi, înseamnă că sensurile indicate în figură sînt cele reale.

4°. Se consideră placa omogenă pătrată de dimensiuni $4a \times 4a$ încărcată și rezemată așa cum se arată în fig. 7.9. Se cere să se determine cele șase reacțiuni N_1, \dots, N_6 .

Rezolvare. Pentru determinarea reacțiunii N_1 vom scrie o ecuație de momente în raport cu axa A_1A . Rezultă

$$P \cdot 2a - 2P \cdot 3a - N_1 \cdot 4a = 0, \text{ de unde } N_1 = -P.$$

Pentru determinarea reacțiunii N_2 proiectăm pe direcția O_1O . Obținem

$$N_2 - P = 0, \text{ de unde } N_2 = P.$$

Pentru determinarea reacțiunii N_3 scriem o ecuație de momente în raport cu o axă verticală trecînd prin O . Obținem

$$N_3 \cdot 4a + 2P \cdot a + P \cdot 2a = 0, \\ \text{de unde } N_3 = -P.$$

Pentru determinarea reacțiunii N_4 scriem o ecuație de momente în raport cu axa BC . Obținem

$$N_4 \cdot 4a - G \cdot 2a = 0, \text{ de unde} \\ N_4 = \frac{G}{2}.$$

Pentru determinarea reacțiunii N_5 vom scrie o ecuație de momente în raport cu axa CA . Rezultă

$$N_5 \cdot 4a \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \text{ de unde } N_5 = 0.$$

Pentru determinarea reacțiunii N_6 vom scrie o ecuație de momente în raport cu axa AB . Se obține

$$N_6 \cdot 4a - G \cdot 2a = 0, \text{ de unde } N_6 = \frac{G}{2}.$$

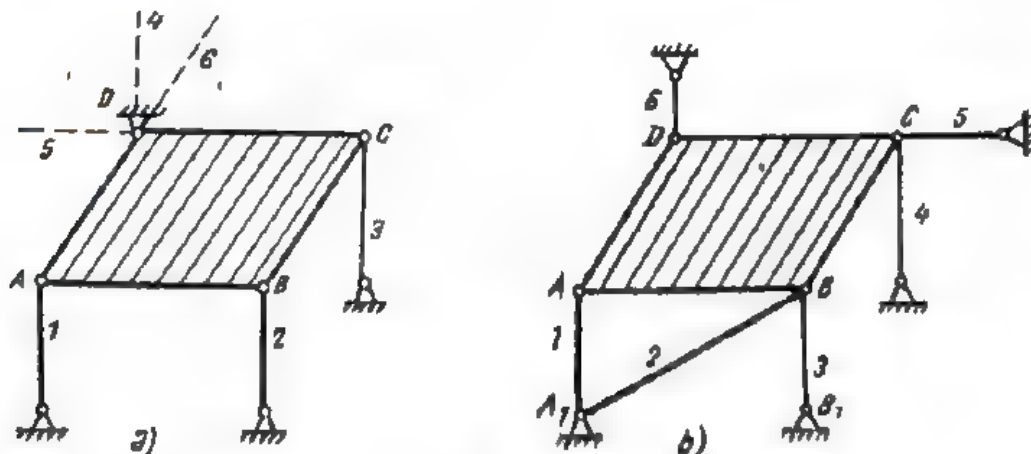


Fig. 7.10

Observație. Reacțiunile N_1, N_2, N_3 , care au rezultat pozitive au sensurile indicate în figură, iar N_4 și N_5 au sensuri contrarii celor indicate în fig. 7.9. Reacțiunea N_6 fiind nulă, bara H_1B ar putea fi înlăturată, bineînțeles numai pentru cazul încărcării arătate în figură.

5°. Să se arate că plăcile din fig. 7.10 nu se pot găsi în repaus pentru orice încărcare deoarece nu sînt strict imobilizate. Să se indice mișcările infinitezimale pe care le pot executa plăcile precum și sistemele de forțe pentru care plăcile pot rămîne în repaus.

R e z o l v a r e. Placa din fig. 7.10, *a* nu este strict imobilizată, deoarece suporturile celor șase reacțiuni aparțin aceluiasi complex de gradul I, ele fiind întîlnite la distanță finită sau înfiuță de suportul reacțiunii N_4 .

Rezultă că placa poate executa o mișcare de rotație infinitezimală în jurul acestei axe, neîmpiedicată de nici unul dintre reazeme. Placa rămîne în repaus pentru toate sistemele de forțe pentru care momentul resultant în raport cu axa 4 este nul (de exemplu un sistem de forțe verticale). Reacțiunile rămîn însă nedeterminate.

Placa din fig. 7.10, *b* nu este strict imobilizată deoarece suporturile celor șase reacțiuni aparțin aceluiasi complex de gradul I, ele fiind paralele cu un același plan ABA_1B_1 . Rezultă că placa poate executa o mișcare de translație infinitezimală în direcția normală pe acest plan, respectiv AD , mișcare ce nu este împiedicată de nici unul dintre reazeme. Placa rămîne în repaus pentru toate sistemele de forțe pentru care proiecția rezultantei pe direcția AD este nulă. Reacțiunile rămîn însă nedeterminate.

B. SOLIDUL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

§ 7. Frecările în cazul corpurilor rezemate. În capitolul precedent au fost studiate legăturile fără frecare (ideale). În realitate apar întotdeauna frecări. Cauza este deformarea corpurilor. Teoria frecărilor aparține deci mecanicii corpurilor deformabile. În acest capitol vom studia numai aspectul general al problemei frecărilor.

Să considerăm un solid rigid care nu are altă legătură decît un reazem simplu în punctul O . Vom denumi punctul O , *punct teoretic de contact*. Sprijinul a două corpuri nu se poate face însă într-un singur punct. În realitate, în afară de punctul teoretic O mai există și alte puncte A_i de contact în vecinătatea lui O , aceasta din cauza deformăției celor două corpuri (fig. 7.11).

Să aplicăm principiul forțelor de legătură pentru fiecare punct A_i în parte, înlocuind legătura geometrică în A_i cu o reacțiune \vec{p}_i .

Forțele de legătură \vec{p}_i alcătuiesc un sistem al cărui torsor în raport cu punctul teoretic de contact O are componentele (\vec{R}, \vec{M}_O) . Să notăm cu (\vec{Q}, \vec{M}_O) componentele torsorului forțelor exterioare calculat în raport cu același punct O .

Pentru echilibru este necesar ca

$$\vec{Q} + \vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O + \vec{M}_O = 0. \quad (7.21)$$

Să considerăm acum în punctul O un triedru ortogonal $Oxyz$ avînd axa Oz normală la suprafața teoretică de contact, iar axele Ox și Oy în planul tangent la această suprafață. Să descompunem vectorii \vec{Q} , \vec{M}_O și \vec{R} , \vec{M}_O după axa Oz și planul xOy .

Notăm componentele cu Q_z , Q_t , M_z , M_t și R_z , R_t , M_z , M_t .

Să analizăm rolul pe care-l îndeplinește fiecare componentă în parte.



Fig. 7.11

a) Componenta \bar{R}_z tinde să deplaseze solidul în direcția axei Oz . Această tendință este împiedicată de componenta R_z pe care o vom denumi *reațiune normală* și o vom nota în cele ce urmează cu N .

În cazul legăturii bilaterale, \bar{N} poate avea orice sens. În cazul legăturii unilaterale, N nu poate avea decât un anumit sens. În ceea ce privește modulul acestei reacțiuni, se admite că poate fi oricât de mare (corpurile în contact sînt foarte rezistente). Reacțiunea normală este *caracteristică rezemării simple*, în sensul că nu se poate concepe o astfel de rezemare fără existența acestei reacțiuni.

b) Componenta \bar{R}_t are tendința de a deplasa corpul în planul tangent la suprafața de contact. Deplasarea aceasta poartă numele de *alunecare*.

Acestei tendințe de deplasare i se opune o forță \bar{R}_t denumită *forță de frecare de alunecare*. În cele ce urmează o vom nota cu \bar{T} .

Direcția reacțiunii T este deci cuprinsă în planul tangent la suprafața teoretică de contact, sensul ei este invers tendinței de alunecare. Experiența arată că, pentru echilibru, mărimea ei nu poate depăși o anumită valoare, T_{max} . Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale \bar{N} . Ea poate fi exprimată sub forma stabilită anterior

$$|T_{max}| = \mu |N|, \quad (7.22)$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare. Acest coeficient nu are dimensiuni. Pentru echilibru, deci

$$|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}| \quad (7.23)$$

(v. și cap. III, C. Statica punctului material supus la legături cu frecare).

c) Componenta \bar{M}_z reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe normale la suprafața teoretică de contact. Această rotație poartă numele de *pivotare*. Tendinței de pivotare i se opune un cuplu de moment \bar{M}_z , denumit *cuplu de frecare de pivotare*. Vom nota în cele ce urmează momentul acestui cuplu cu \bar{M}_n .

Experiența arată că mărimea momentului \bar{M}_n nu poate depăși o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale \bar{N} . Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\bar{M}_{nmax}| = \nu |\bar{N}|, \quad (7.24)$$

în care ν este coeficientul de frecare de pivotare. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\bar{M}_n| \leq \nu |\bar{N}|. \quad (7.25)$$

d) Componenta \bar{M}_t reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe cuprinsă în planul tangent la suprafața de contact.

Această rotație poartă numele de *rostogolire*. Tendinței de rostogolire i se opune un *cuplu* de moment \bar{M}_t denumit *cuplu de frecare de rostogolire*.

Experiența arată că mărimea momentului \bar{M}_t nu poate depăși o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de deformabilitatea suprafețelor care mărginesc corpurile și de intensitatea reacțiunii \bar{N} . Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\bar{M}_{t \max}| = s |\bar{N}|, \quad (7.26)$$

în care s este *coeficientul de frecare de rostogolire*. Acest coeficient are dimensiunile unei lungimi. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\bar{M}_t| \leq s |\bar{N}|. \quad (7.27)$$

Observații. 1°. Coeficientul de frecare de rostogolire poate fi interpretat ca fiind distanța maximă cu care se poate deplasa din punctul teoretic de contact suportul reacțiunii \bar{N} , paralel cu el însuși, astfel încât solidul să nu se rostogolească. Această observație se bazează pe echivalența sistemelor de forțe din fig. 7.12, a și b.

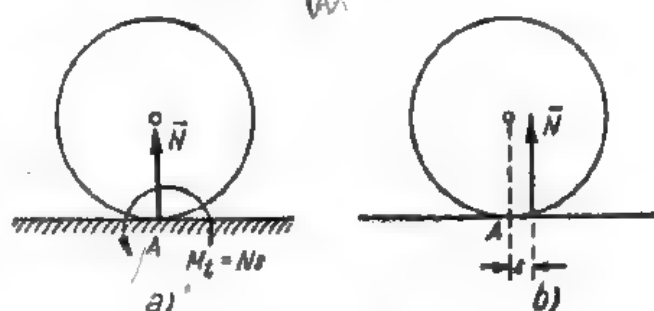


Fig. 7.12

2°. Experiențele au arătat că valoarea coeficientului de frecare de rostogolire s depinde de raza roții. Astfel, pentru cazul unei roți rezemate pe un plan, $s = k\sqrt{r}$, adică acest coeficient este proporțional cu rădăcina pătrată a razei. După diferiți cercetători, pentru oțel pe oțel, $k = 0,0006 - 0,00088$. În formula de mai înainte r și s se măsoară în metri. La roțile vehiculelor de cale ferată, pentru $r = 0,5$ m, rezultă $s = 0,05 - 0,055$ cm.

§ 8. Frecarea în articulații și lagăre. Să considerăm fusul unui arbore care se reazemă într-un lagăr. Vom deosebi două cazuri, după cum lagărul este sau nu este strâns. În cazul când lagărul nu este strâns, contactul între fus și lagăr se face, teoretic, într-un punct, iar practic pe o mică regiune în jurul punctului teoretic de contact; în cazul când lagărul este strâns, contactul între fus și lagăr se face pe întreaga periferie.

a) *Lagărul nestrâns.* Să notăm cu r raza fusului și cu A punctul teoretic de contact (fig. 7.13). Să presupunem că torsiul sistemului de forțe exterioare în raport cu punctul O , situat pe axa fusului roții, are componentele \bar{Q} și \bar{M}_O ; vom presupune că vectorul \bar{Q} este situat într-un plan normal pe axa fusului, iar vectorul \bar{M}_O este dirijat chiar în lungul acestei axe.

Să considerăm și torsiul forțelor de legătură în punctul teoretic de contact A între fus și lagăr. Fie \bar{N} reacțiunea normală, \bar{T} forța de frecare și \bar{M}_t momentul cuplului de frecare de rostogolire. Vom scrie condițiile de echilibru proiectând pe Ax , Ay și scriind ecuația de momente în raport cu punctul A

$$\left. \begin{aligned} T - Q \sin \alpha &= 0, \\ N - Q \cos \alpha &= 0, \\ -M_O + M_t + Qr \sin \alpha &= 0, \\ M_t &\leq Ns, \\ T &\leq \mu N. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Din primele relații scoatem

$$T = R \sin \alpha, N = R \cos \alpha, M_t = M_o - Rr \sin \alpha, \quad (7.29)$$

încît ultimele două inegalități se scriu

$$M_o - Rr \sin \alpha \leq Rr \cos \alpha, R \sin \alpha \leq \mu R \cos \alpha, \quad (7.30)$$

sau

$$M_o \leq Rr \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right), \operatorname{tg} \alpha \leq \mu. \quad (7.31)$$

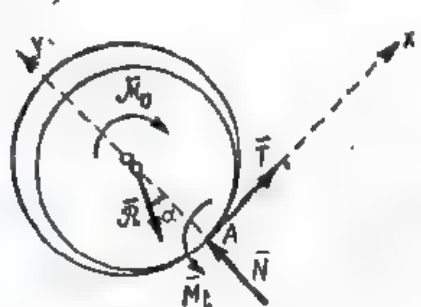


Fig. 7.13

La limită

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu, \sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

și formula (7.31) devine

$$M_o \leq \frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot r \cdot R, \quad (7.32)$$

sau încă, notînd:

$$\frac{\mu + \frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}} = \mu', \quad (7.33)$$

se obține

$$M_o \leq \mu' r R, \quad (7.34)$$

unde μ' este coeficientul de frecare în lagăr.

Ținînd seama că $R = \bar{R}$ și că în cazul unei articulații cilindrice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

iar în cazul unei articulații sferice

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

expresia (7.32) a momentului cuplului de frecare în lagăr se mai scrie

$$M_o \leq \mu' r \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (7.35)$$

în cazul lagărelor și articulațiilor cilindrice, și

$$M_o \leq \mu' r \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (7.36)$$

în cazul articulațiilor sferice.

b) *Lagărul strîns* În acest caz, în fiecare punct de contact între fus și lagăr se va naște o reacțiune normală \bar{N}_i și o reacțiune tangențială T_i (forță de frecare). Momentul de frecare în lagăr este

$$M_f = \sum T_i r = \sum \mu N_i r = \mu r \sum N_i = \mu \sum_i N_i r R = \mu' r R.$$

Pentru echilibru va trebui ca momentul motor M_0 să îndeplinească condiția

$$M_0 \leq \mu' r R, \quad (7.37)$$

unde, de data aceasta

$$\mu' = \frac{\sum N_i}{R} \mu. \quad (7.38)$$

Relația dintre coeficientul de frecare în lagăr μ' și coeficientul de frecare μ depinde de legea de variație a reacțiunilor N_i în lungul regiunii de contact.

Observații. 1°. Frecarea în lagăre este un fenomen foarte complex. Studiul ei complet poate fi făcut în cadrul mecanicii corpurilor deformabile și în mecanica fluidelor, deoarece ea este într-o mare măsură un fenomen hidrodinamic, producându-se între pelicula de ulei care acoperă fusul și pelicula de ulei care acoperă lagărul. Ca atare, formulele date sint cu totul aproximative și nu pot fi aplicate decât în cazurile cînd coeficientul de frecare μ' a fost determinat experimental. Trebuie să menționăm că acest coeficient variază mult cu viteza de rotație a lagărului.

2°. Se poate asimila frecarea în lagăr cu o deplasare a reacțiunii \bar{R} , paralelă cu ea însăși, cu o distanță egală cu μr . Cercul de rază μr , cu centrul în articulație, poartă numele de *cerc de frecare*. Pentru echilibru este deci necesar ca reacțiunea \bar{R} să intersecteze sau, la limită, să fie tangență cercului de frecare.

Aplicații. 6°. *Problema scriei.* O bară AB grea situată într-un plan vertical se reazemă cu o extremitate A pe un plan orizontal și cu cealaltă extremitate B pe un plan vertical. Să se determine unghiul α pentru poziția de echilibru. Coeficienții de frecare de alunecare se vor lua μ_A și μ_B .

Vom alege axele Ox și Oy așa cum se arată în fig. 7.14, *a*. Se introduc în A și B reacțiunile normale \bar{N}_A și \bar{N}_B și forțele de frecare de alunecare T_A și T_B . Condițiile de echilibru devin

$$\left. \begin{aligned} N_B - T_A &= 0, \\ N_A + T_B - G &= 0, \\ G \cos \alpha - 2 l N_B \sin \alpha - 2 l T_B \cos \alpha &= 0, \\ T_A &\leq \mu_A N_A, \quad T_B \leq \mu_B N_B. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Din primele trei ecuații (7.39), exprimînd trei dintre necunoscute, de exemplu N_A , T_A și T_B în funcție de celelalte două (N_B și α), obținem

$$N_A = \frac{G}{2} + N_B \operatorname{tg} \alpha, \quad T_A = N_B, \quad T_B = \frac{G}{2} - N_B \operatorname{tg} \alpha, \quad (7.40)$$

Introducînd expresiile (7.40) în ultimele două inegalități din (7.39), obținem

$$N_B \leq \mu_A \left(\frac{G}{2} + N_B \operatorname{tg} \alpha \right), \quad \frac{G}{2} - N_B \operatorname{tg} \alpha \leq \mu_B N_B$$

care mai pot fi scrise sub formă

$$(1 - \mu_A \operatorname{tg} \alpha) N_B \leq \mu_A \frac{G}{2}, \quad \frac{G}{2} \leq (\mu_B + \operatorname{tg} \alpha) N_B. \quad (7.41)$$

Înmulțind inegalitatea a doua cu μ_A și adunând-o cu prima obținem

$$(1 - \mu_A \operatorname{tg} \alpha) N_B \leq \mu_A (\mu_B + \operatorname{tg} \alpha) N_B, \text{ de unde } \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2 \mu_A}. \quad (7.42)$$

Dacă notăm cu α_0 unghiul definit prin relația

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2 \mu_A} \quad (7.43)$$

putem avea următoarele cazuri:

$\alpha > \alpha_0$ echilibru, $\alpha < \alpha_0$ neechilibru; $\alpha = \alpha_0$ echilibru limită.

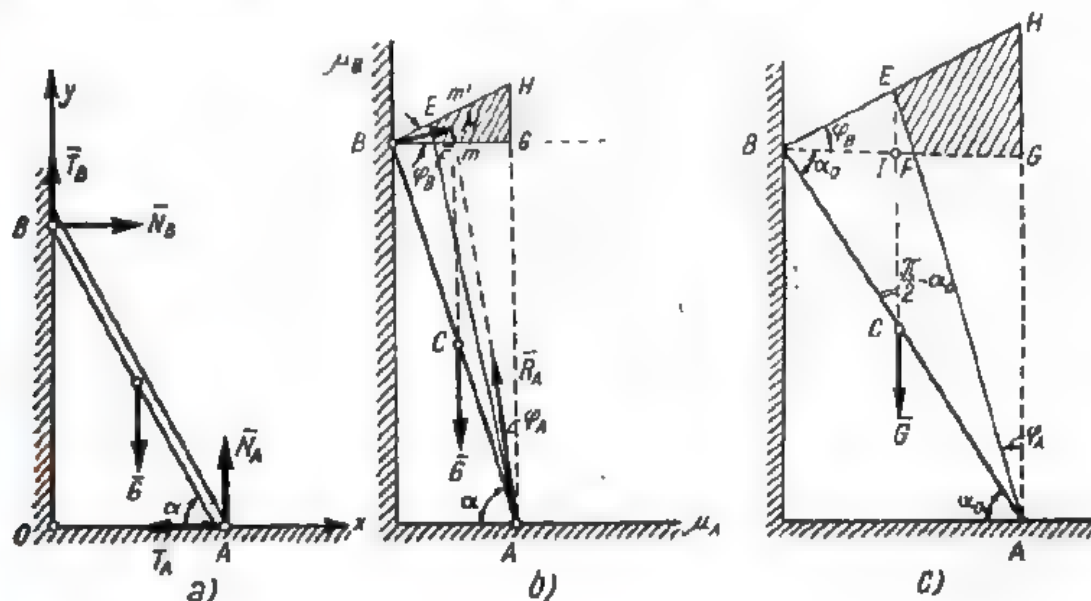


Fig. 7.14

O b s e r v a Ț i e. Se poate da și o soluție grafică acestei probleme folosind noțiunea de unghi de frecare (v. cap. III, § 13). Să considerăm bara într-o poziție oarecare; vom să verificăm dacă ea se găsește în echilibru (fig. 7.14, b). Se duc normalele în A și B și două drepte AF și BH care fac cu normalele în A și B respectiv unghiurile de frecare φ_A și φ_B definite prin relațiile

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \mu_A \text{ și } \operatorname{tg} \varphi_B = \mu_B.$$

Ținând seama de tendința de alunecare a barei și de sensurile forțelor de frecare, dreapta AF se va duce în stînga normalei din A și dreapta BH se va duce deasupra normalei în B. Aceste drepte închid între ele un patrulater denumit *patrulaterul frecărilor* (hașurat în fig. 7.14, b și c) care se bucură de proprietatea remarcabilă că, după cum este traversat sau nu de suportul greutății G, bara este sau nu în echilibru.

Într-adevăr, să presupunem că suportul greutății G traversează patrulaterul (fig. 7.14, b). Alegînd un punct arbitrar M pe segmentul mm' putem descompune forța G după direcțiile MA și MB. Cele două componente, cu sens opus, R_A și R_B , pot fi reacțiuni în A și B deoarece suporturile lor fac cu normalele respective unghiuri mai mici decît unghiurile de frecare, φ_A și φ_B . Problema determinării reacțiunilor admite o infinitate de soluții, deoarece există o infinitate de puncte M pe segmentul mm' .

Dacă suportul reacțiunii nu traversează patrulaterul frecărilor, atunci nu se poate găsi nici un punct M pe suportul greutății G astfel încît MA și MB să facă cu normalele în A și B unghiuri mai mici decît φ_A și φ_B , deci echilibrul este imposibil.

Cazul limită de echilibru se află cînd suportul forței G trece prin vîrfurile E al patrulaterului (fig. 7.14, c). În acest caz putem determina unghiul limită observînd relațiile

$$BE \cos \varphi_B = AE \sin \varphi_A = l \cos \alpha_0 \text{ și } AE \cos \varphi_A = BE \sin \varphi_B = 2 l \sin \alpha_0$$

rezultate din proiecția conturului ABE pe axele Ox și Oy . Apoi

$$2 \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{AE \cos \varphi_A - BE \sin \varphi_B}{BE \cos \varphi_B} = \frac{AE \cos \varphi_A}{BE \cos \varphi_B} - \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{\cos \varphi_B \cos \varphi_A}{\sin \varphi_A \cos \varphi_B} - \operatorname{tg} \varphi_B.$$

sau

$$2 \operatorname{tg} \alpha_0 = \cotg \varphi_A - \operatorname{tg} \varphi_B = \frac{1}{\mu_A} - \mu_B = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{\mu_A}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2 \mu_A}.$$

Am regăsit astfel rezultatul stabilit pe cale analitică (7.43).

7°. *Problema roților.* Să studiem echilibrul unor roți pe un plan înclinat, cunoscând raza r a roților și coeficienții de frecare de alunecare μ și de rostogolire s . Considerăm, pe rând, cazul roții trase și cazul roții motoare.

a) *Roata trasă* (fig. 7.15). Introducem în punctul teoretic de contact forța de frecare \vec{T} și cuplul de frecare de rostogolire de moment \vec{M}_t . Condițiile de echilibru sînt

$$F - G \sin \alpha - T = 0, \quad N - G \cos \alpha = 0, \quad -Fr + Gr \sin \alpha + M_t = 0, \quad T \leq \mu N, \quad M_t \leq Ns.$$

Din primele trei ecuații deducem $T = F - G \sin \alpha$, $N = G \cos \alpha$, $M_t = (F - G \sin \alpha)r$. Condițiile de echilibru devin

$$\begin{aligned} F - G \sin \alpha &\leq \mu G \cos \alpha, \quad (F - G \sin \alpha)r \leq Gs \cos \alpha, \\ \text{sau} \quad F &\leq G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad F \leq G \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Să admitem

$$G (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) > G \left(\sin \alpha + \frac{s}{r} \cos \alpha \right)$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$\mu > \frac{s}{r}. \quad (7.45)$$

Cînd F crește, roata își va pierde echilibrul rostogolindu-se. Dacă $\mu < \frac{s}{r}$, roata își va pierde echilibrul alunecînd, iar dacă $\mu = \frac{s}{r}$, roata va părăsi poziția de echilibru alunecînd și rostogolindu-se în același timp.

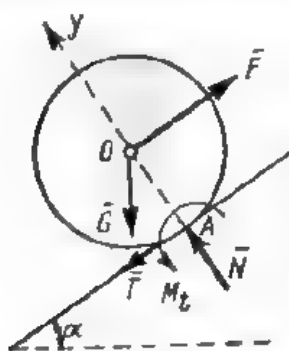


Fig. 7.15

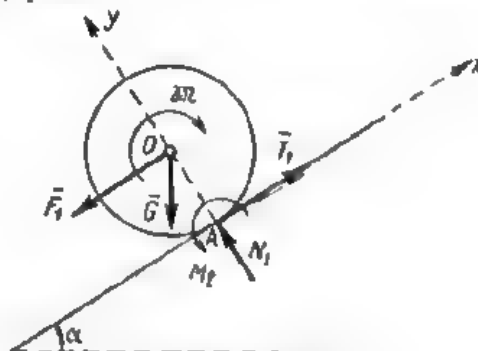


Fig. 7.16

O b s e r v a ț i e. Pentru valorile practice $\mu > \frac{s}{r}$, se citează totuși cazuri cînd, pentru r foarte mic, corpul alunecă: de exemplu dacă se dă drumul unui ac pe un plan înclinat acesta va aluneca înainte de a începe să se rostogolească.

b) *Roata motoare* (fig. 7.16). Introducem în punctul teoretic de contact reacțiunea normală \vec{N}_1 , forța de frecare \vec{T}_1 și cuplul de frecare de rostogolire de moment \vec{M}_t . Forța

de frecare este dirijată în sensul pozitiv al axei Ox , deoarece tendința de alunecare este în sensul negativ al axei, din cauza forței de tracțiune \bar{F}_1 . Sensul de înaintare al roții este în sensul pozitiv al axei Ox . S-a notat cu \mathfrak{M} momentul cuplului motor.

Condițiile de echilibru sînt

$$\begin{aligned} T_1 - F_1 - G_1 \sin \alpha &= 0, \quad N_1 - G_1 \cos \alpha = 0, \\ F_1 r + G_1 r \sin \alpha + M_1 - \mathfrak{M} &= 0, \\ T_1 &\leq \mu N_1, \quad M_1 \leq s N_1. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Din primele trei ecuații deducem

$$T_1 = F_1 + G_1 \sin \alpha; \quad N_1 = G_1 \cos \alpha, \quad M_1 = \mathfrak{M} - (F_1 + G_1 \sin \alpha)r.$$

Atunci condițiile de echilibru devin

$$F_1 + G_1 \sin \alpha \leq \mu G_1 \cos \alpha, \quad \mathfrak{M} - (F_1 + G_1 \sin \alpha)r \leq s G_1 \cos \alpha,$$

sau încă

$$F_1 \leq G_1 (\mu \cos \alpha - \sin \alpha), \quad \mathfrak{M} \leq F_1 r + G_1 (r \sin \alpha + s \cos \alpha). \quad (7.47)$$

Presupunind prima condiție îndeplinită și admitînd că \mathfrak{M} crește, roata motoare se va pune în mișcare rostogolindu-se fără să alunece. Dacă însă prima condiție nu este îndeplinită roata motoare se va pune în mișcare alunecînd și rostogolindu-se în același timp (va „patina”).

8°. Frecare de pivotare în cazul unui arbore vertical. Să considerăm un arbore cilindric de rază r și de greutate G (fig. 7.17). Presupunem coeficientul de frecare μ , între arbore și lagăr, același pe întreaga suprafață de rezemare și admitem că presiunea pe suprafața de rezemare a arborelui este constantă. Rezultă

$$p = \frac{G}{\pi r^2}.$$

Pe un element de suprafață $dA = \rho d\rho d\theta$ se va exercita o forță normală

$$p dA = \frac{G}{\pi r^2} \rho d\rho d\theta$$

și o forță de frecare, tangentă la un cerc de rază ρ

$$\mu p dA = \frac{\mu G}{\pi r^2} \rho d\rho d\theta.$$

Momentul față de centrul O al tuturor acestor forțe de frecare va fi egal cu momentul cuplului de pivotare

$$M_n = \int \int \rho \mu p dA = \frac{\mu G}{\pi r^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta,$$

sau, efectuînd calculele,

$$M_n = \frac{2}{3} \mu G r. \quad (7.48)$$

Comparînd acest rezultat cu formula (7.25) deducem valoarea coeficientului de frecare de pivotare pentru un arbore de secțiune circulară

$$\nu = \frac{2}{3} \mu r. \quad (7.49)$$

Observații. 1°. În cazul unui arbore gol în interior, notînd cu r_1 și r_2 cele două raze, în urma efectuării calculelor rezultă

$$M_n = \frac{2}{3} \mu G \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (7.50)$$

deci

$$v = \frac{2}{3} \mu \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \quad (7.51)$$

2°. Ipotezele care au stat la baza stabilirii formulelor (7.49) și (7.51) pentru coeficientul de frecare de pivotare și anume acelea privitoare la repartizarea uniformă a presiunilor pe suprafața de rezemare și la invariabilitatea coeficientului de frecare de alunecare μ nu sînt îndeplinite riguros în practică.

Cauzele sînt: neregularitățile inevitabile ale suprafețelor în contact, deformațiile celor două corpuri în contact, variația coeficientului de frecare de alunecare μ cu viteza, prezența unui strat de lubrifiant între suprafețele în contact etc.

Din această cauză, coeficientul de frecare de pivotare v și coeficientul mediu de frecare de alunecare μ trebuie determinați pe cale experimentală.

9°. Se consideră roata din fig. 7.18 de rază R acționată de greutatea G și de forța

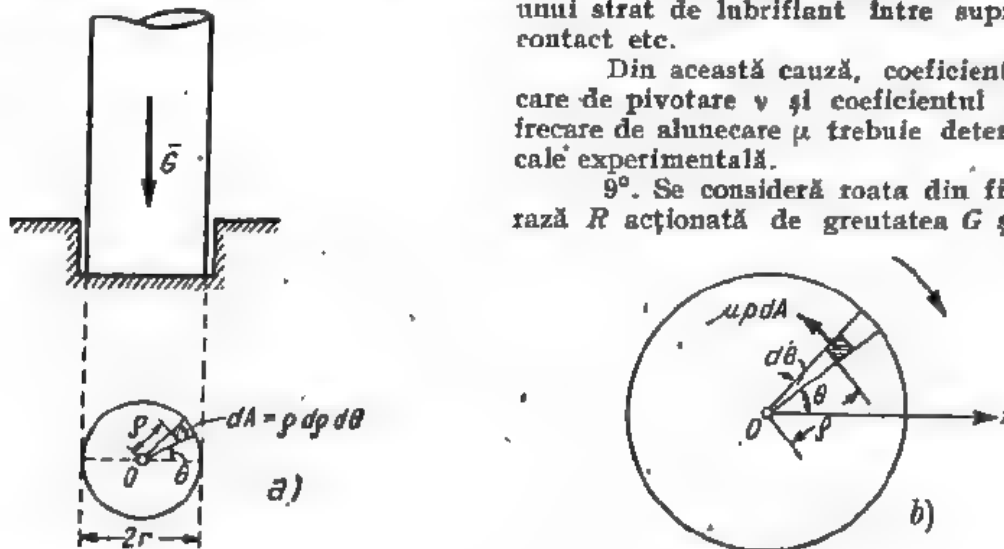


Fig. 7.17

orizontală F . Cunosând coeficientul de frecare μ_1 în lagăr și raza r a fusului roții, se cere să se determine limitele între care poate varia intensitatea forței F , astfel încît roata să stea în repaus.

Se va compara cu cazul cînd nu există frecare. Se va da și o soluție grafică, utilizînd cercul frecărilor.

Rezolvare. Înlăturînd lagărul vom introduce o reacțiune orizontală H , una verticală V și un cuplu de frecare, de moment M_f . Scriînd ecuațiile de proiecții și de momente și condiția de echilibru pentru momentul de frecare obținem

$$-H + F = 0, \quad V - G = 0, \quad M_f + GR - FR = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 \sqrt{H^2 + V^2} \leq M_f \leq \mu_1 r \sqrt{H^2 + V^2}.$$

S-a considerat o dublă inegalitate, deoarece există două posibilități pentru sensul de rotație. Din primele trei ecuații deducem

$$H = F, \quad V = G, \quad M_f = (F - G)R,$$

astfel încît dubla inegalitate devine

$$-\mu_1 r \sqrt{F^2 + G^2} \leq (F - G)R \leq \mu_1 r \sqrt{F^2 + G^2},$$

Se obține în cele din urmă inegalitatea

$$(F - G)^2 R^2 \leq \mu_1^2 r^2 (F^2 + G^2),$$

sau

$$(R^2 - \mu_1^2 r^2) F^2 - 2GR^2 F + (R^2 - \mu_1^2 r^2) G^2 \leq 0.$$

Admițând $R^2 - \mu_1^2 r^2 > 0$ (în caz contrar roata se blochează), rezultă

$$F_1 \leq F \leq F_2,$$

unde forța maximă F_2 și forța minimă F_1 au expresiile

$$F_2 = \frac{R^2 + \sqrt{\mu_1^2 r^2 (2R^2 - \mu_1^2 r^2)}}{R^2 - \mu_1^2 r^2}, \quad F_1 = \frac{R^2 - \sqrt{\mu_1^2 r^2 (2R^2 - \mu_1^2 r^2)}}{R^2 - \mu_1^2 r^2}.$$

Forța F_0 corespunzătoare cazului când se neglijează frecarea în lagăr se obține din expresia lui F_1 sau F_2 , făcând $\mu_1 = 0$. Rezultă $F_0 = G$.

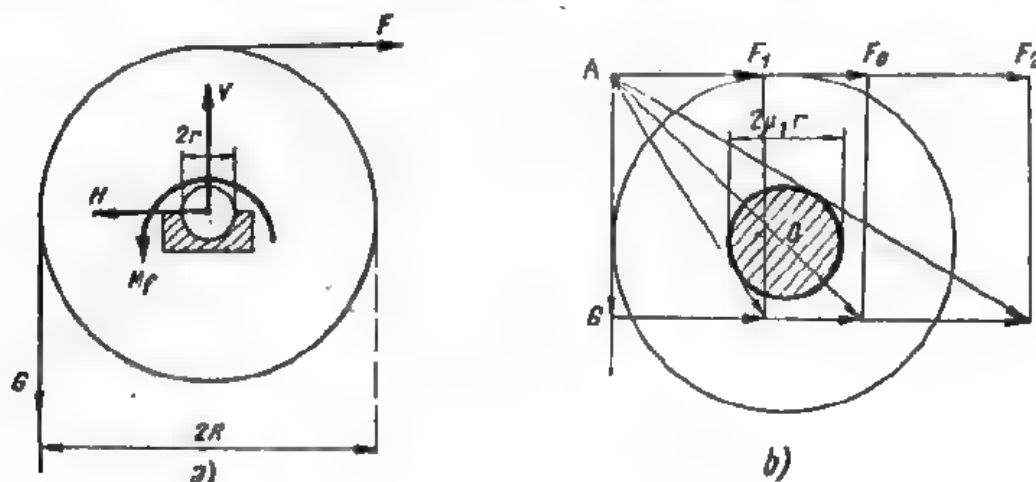


Fig. 7.18

Soluția grafică este arătată în fig. 7.18, b). Se prelungește suporturile forțelor F și \bar{G} pînă ce se întîlnesc în A . Se construiește cercul de frecare, cu centrul în O și avînd raza $\mu_1 r$. Pentru echilibru va trebui ca suportul rezultantei forțelor date, F și \bar{G} , să întîlnească cercul de frecare iar, la limită, să fie tangent acestui cerc. Din A se vor duce tangentele la cercul de frecare. Vom completa paralelogramul forțelor \bar{F} și \bar{G} (în cazul de față un dreptunghi) ducînd o paralelă la suportul lui \bar{F} , prin vîrfurile vectorului \bar{G} , apoi ducînd paralela la \bar{G} prin vîrfurile vectorului rezultat. Considerînd pozițiile cînd vectorul rezultat este tangent cercului frecărilor și poziția cînd suportul vectorului rezultat trece prin centrul O , obținem pentru F valorile: maximă (F_2), minimă (F_1) și cea corespunzătoare cazului fără frecare (F_0).

VIII. STATICA SISTEMELOR

§ 1. Sisteme de puncte materiale. Forțe interioare și exterioare. Fie (A) un sistem de puncte materiale A_1, A_2, \dots, A_n . Dacă aceste puncte interacționează mecanic, atunci (A) formează un sistem mecanic de puncte materiale. Ne vom ocupa în cele ce urmează de astfel de sisteme, pe care le vom numi pe scurt *sisteme de puncte materiale*.

Forțele care acționează sistemul (A) de puncte materiale, pot fi grupate în două categorii:

a) Componenta \overline{R}_z tinde să deplaseze solidul în direcția axei Oz . Această tendință este împiedicată de componenta \overline{R}_z pe care o vom denumi *reațiune normală* și o vom nota în cele ce urmează cu \overline{N} .

În cazul legăturii bilaterale, \overline{N} poate avea orice sens. În cazul legăturii unilaterale, \overline{N} nu poate avea decât un anumit sens. În ceea ce privește modulul acestei reacțiuni, se admite că poate fi oricât de mare (corpurile în contact sînt foarte rezistente). Reacțiunea normală este *caracteristică rezemării simple*, în sensul că nu se poate concepe o astfel de rezemare fără existența acestei reacțiuni.

b). Componenta \overline{R}_t are tendința de a deplasa corpul în planul tangent la suprafața de contact. Deplasarea aceasta poartă numele de *alunecare*.

Acestei tendințe de deplasare i se opune o forță \overline{R}_t denumită *forță de frecare de alunecare*. În cele ce urmează o vom nota cu T .

Direcția reacțiunii T este deci cuprinsă în planul tangent la suprafața teoretică de contact, sensul ei este invers tendinței de alunecare. Experiența arată că, pentru echilibru, mărimea ei nu poate depăși o anumită valoare, T_{max} . Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale \overline{N} . Ea poate fi exprimată sub forma stabilită anterior

$$|T_{max}| = \mu |\overline{N}|, \quad (7.22)$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare. Acest coeficient nu are dimensiuni. Pentru echilibru, deci

$$|T| \leq \mu |\overline{N}| \quad (7.23)$$

(v. și cap. III, C. Statica punctului material supus la legături cu frecare).

c) Componenta \overline{M}_z reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe normale la suprafața teoretică de contact. Această rotație poartă numele de *pivotare*. Tendinței de pivotare i se opune un cuplu de moment \overline{M}_z , denumit *cuplu de frecare de pivotare*. Vom nota în cele ce urmează momentul acestui cuplu cu \overline{M}_n .

Experiența arată că mărimea momentului \overline{M}_n nu poate depăși o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale \overline{N} . Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\overline{M}_{nmax}| = \nu |\overline{N}|, \quad (7.24)$$

în care ν este coeficientul de frecare de pivotare. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\overline{M}_n| \leq \nu |\overline{N}|, \quad (7.25)$$

d) Componenta \overline{M}_t reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe cuprinsă în planul tangent la suprafața de contact.

O legătură poate fi interioară sau exterioră unui sistem de puncte (A), după cum ambele puncte între care se exercită, sau numai unul dintre acestea, fac parte din sistemul (A).

Legăturile unui sistem (A) de n puncte materiale se pot exprima prin relații scalare între coordonatele acestor puncte. Fie m numărul acestor relații. Dacă aceste relații sînt independente între ele, numărul parametrilor independenți ai sistemului va fi egal cu $3n - m$. Se spune în acest caz, că sistemul (A) are $3n - m$ grade de libertate.

Legăturile pot fi înlocuite prin forțe de legătură, conform principiului forțelor de legătură, enunțat în cap. III, § 5.

§ 3. Echilibrul sistemelor de puncte. Un sistem de puncte materiale este în echilibru, dacă fiecare punct material este în echilibru.

Rezultă că sistemul (A) de puncte materiale va fi în echilibru dacă

$$\bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; i \neq j), \quad (8.3)$$

unde cu \bar{F}_i am notat forțele exterioare și cu \bar{F}_{ij} forțele interioare.

Putem deosebi două categorii de probleme relativ la echilibrul sistemelor de puncte:

a) Fiind date pozițiile punctelor care formează un sistem (A) în echilibru, se cere să se determine forțele care acționează acest sistem.

b) Fiind date forțele care acționează sistemul (A) de puncte, să se determine poziția de echilibru a acestui sistem.

Condițiile (8.3) de echilibru sînt echivalente cu $3n$ relații scalare. În cazul sistemelor cu legături, numărul parametrilor geometrice este egal cu $3n - m$ dacă legăturile sînt date prin m relații scalare independente. Urmează că dintre cele $3n$ ecuații de echilibru, numai $3n - m$ vor servi la determinarea poziției sistemului, iar restul de m ecuații se vor utiliza pentru determinarea forțelor de legătură.

Se observă că problema, astfel enunțată în cazul cel mai general, este o problemă mixtă în raport cu clasificarea menționată anterior. Într-adevăr, în acest caz, este necesar să se determine atît poziția sistemului de puncte, cît și forțele de legătură respective.

Nu totdeauna sistemul de $3n$ ecuații liniare scalare, echivalent cu (8.3), este compatibil și determinat.

Un sistem de n puncte, pentru care cele $3n$ ecuații scalare de echilibru permit un sistem de $3n$ soluții finite și bine determinate, se numește *sistem static determinat*.

§ 4. Teorema solidificării. Teorema echilibrului părților. Relația (8.3) ne arată că toate forțele care acționează asupra punctelor sistemului (A) formează, în cazul echilibrului, un sistem de forțe, al cărui torsor este nul pentru orice punct al spațiului, adică

$$\tau(\bar{F}_i) + \tau(\bar{F}_{ij}) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, n). \quad (8.4)$$

Doarece însă torşorul forţelor interioare este nul, rezultă

$$\tau(\bar{F}_i) = 0. \quad (8.5)$$

Urmează că torşorul forţelor exterioare, efectiv aplicate şi de legătură, care acţionează un sistem de puncte în echilibru, este nul.

În cazul rigidului, condiţia (8.5) era necesară şi suficientă pentru echilibru (v. cap. VI, § 1). În cazul unui sistem de puncte materiale ea este necesară deoarece a fost dedusă din condiţiile de echilibru (8.3). În general ea nu este şi suficientă. Rezultă următoarea teoremă:

Teorema solidificării. Condiţiile de echilibru ale rigidului sînt necesare şi pentru un sistem de puncte materiale. În general ele nu sînt şi suficiente.

Să considerăm că sistemul (A) de n puncte materiale este format din l subsisteme (A_h) , ($h=1, 2, \dots, l$).

Conform definiţiei echilibrului unui sistem de puncte materiale, dacă sistemul (A) este în echilibru, atunci fiecare punct al său trebuie să fie în echilibru. Însă subsistemele (A_h) sînt formate din punctele sistemului (A). Rezultă că în acest caz şi fiecare subsistem (A_h) trebuie să fie în echilibru. Se poate deci enunţa următoarea teoremă a echilibrului părţilor: *dacă un sistem de puncte libere sau cu legături, se află în echilibru sub acţiunea unor forţe, atunci o parte oarecare din acest sistem va fi de asemenea în echilibru sub acţiunea forţelor corespunzătoare acestei părţi.*

§ 5. Sisteme de corpuri rigide. Un corp rigid poate fi considerat ca un sistem rigid de puncte materiale. Datorită rigidităţii sistemului, distanţa dintre două puncte oarecare ale acestui sistem rămîne constantă.

Un sistem (C) de corpuri rigide C_i ($i=1, 2, \dots, n$) poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale, divizat în subsisteme rigide, fiecare dintre aceste subsisteme alcătuiind unul dintre corpurile rigide C.

Forţele care acţionează sistemul (C) pot fi grupate în *forţe interioare*, reprezentînd interacţiunea mecanică dintre punctele diferitelor corpuri C_i şi în *forţe exterioare* sistemului (C). Forţele interioare vor satisface, bineînţeles, relaţiile (8.1) şi (8.2).

S-a arătat anterior că poziţia unui corp rigid liber depinde de şase parametri scalari (cap. VI, § 5). Urmează că poziţia sistemului, (C) de n corpuri libere, va fi determinată prin $6n$ parametri scalari. Un sistem de n corpuri rigide libere are deci $6n$ grade de libertate.

Legăturile între corpurile sistemului (C), exprimate prin relaţii între coordonatele punctelor corpurilor C_i , vor restrînge gradele de libertate ale sistemului de corpuri. Dacă aceste relaţii sînt independente şi sînt în număr de p , numărul gradelor de libertate ale sistemului (C) va fi $6n - p$.

Deoarece un corp rigid liber are şase grade de libertate, între punctele a două corpuri rigide nu pot exista mai mult de şase relaţii distincte de legătură. Aceste legături pot fi înlocuite cu forţe de legătură, pe baza axiomei forţelor de legătură.

Considerînd sistemul (C) de corpuri rigide ca un sistem de puncte materiale, format din toate punctele acestor corpuri, vom putea spune, pe baza teoremei echilibrului părţilor şi a relaţiei (8.3) că sistemul (C) este

în echilibru dacă torsorul forțelor, care acționează fiecare corp în parte, este nul pentru oricare punct al spațiului. Aceste condiții de echilibru sînt echivalente cu $6n$ ecuații scalare de echilibru.

Dacă cele $6n$ ecuații scalare de echilibru formează un sistem compatibil și determinat, sistemul respectiv de corpuri este un sistem static determinat.

Teorema solidificării și teorema echilibrului părților se pot enunța de asemenea pentru sistemele de corpuri rigide.

Aplicații. 1°. Să se determine reacțiunile din reazeme și forțele interioare din articulațiile grinzii din fig. 8.1 (grindă Gerber).

Rezolvare. Grinda este de fapt un sistem, care se poate descompune în patru grinzi independente așa cum se arată în fig. 8.1, b. Separînd grinziile vom introduce reacțiunile $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, H_2, H_5, H_6$ și forțele interioare $V_2, H_2, V_5, H_5, V_6, H_6$ (fig. 8.1, c). Scriind ecuațiile de proiecții și de momente pentru fiecare grindă în parte vom obține

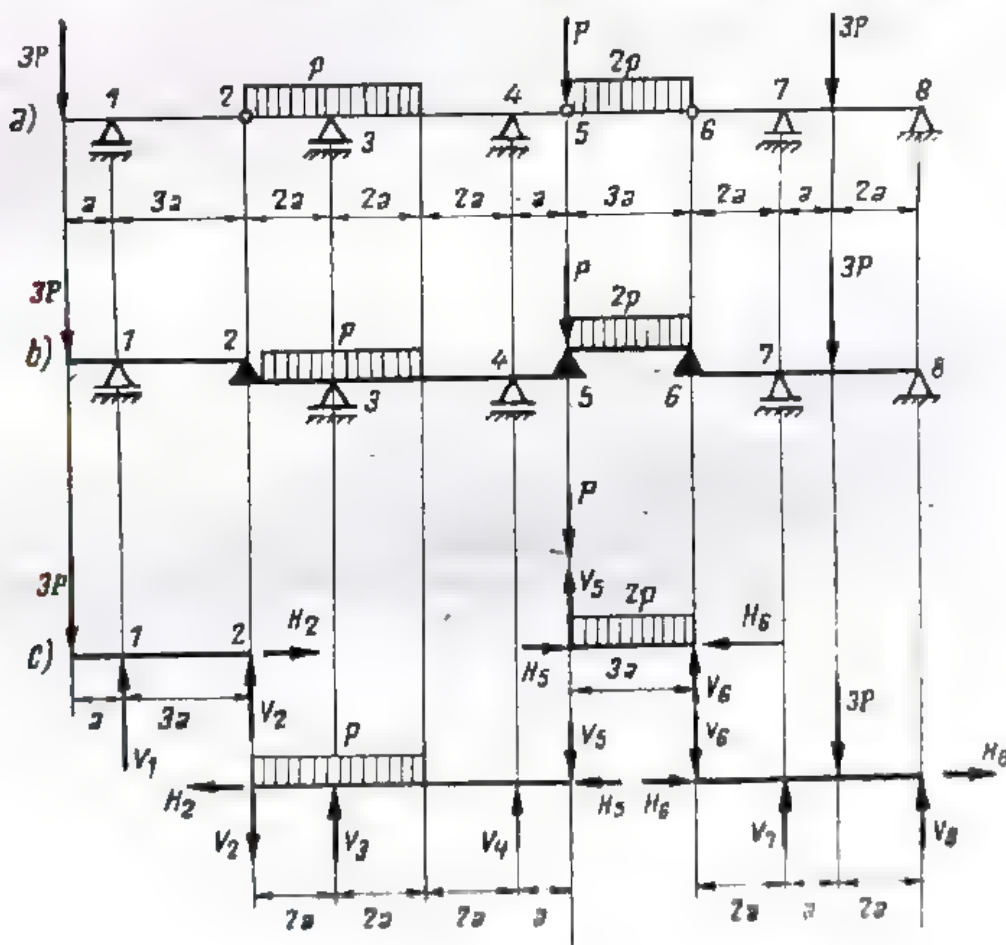


Fig. 8.1

pentru grindă 1-2: $H_2=0, V_1+V_2-3P=0, 3P \cdot 4a - V_1 \cdot 3a = 0;$

pentru grindă 2-3-4-5: $-H_2-H_5=0, V_2+V_3-V_4-V_5-p \cdot 4a = 0,$

$$V_2 \cdot 6a + p \cdot 4a \cdot 4a - V_3 \cdot 4a - V_5 \cdot a = 0,$$

pentru grindă 5-6: $H_5-H_6=0, V_5+V_6-P-2p \cdot 3a = 0,$

$$-V_5 \cdot 3a + P \cdot 3a + 2p \cdot 3a \cdot 1,5a = 0;$$

pentru grinda 6-7-8: $H_6 + H_8 = 0, V_7 + V_8 - V_6 - 3P = 0,$
 $V_6 \cdot 5a - V_7 \cdot 3a + 3P \cdot 2a = 0.$

Rezolvând acest sistem de 12 ecuații cu 12 necunoscute se găsește

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = 0, V_1 = 4P, V_2 = -P, V_3 = P + 3pa, V_4 = 3pa,$$

$$V_7 = 2P + 5pa, V_8 = P - 2pa, V_9 = 3,25pa - 1,75P, V_6 = 3,75pa + 1,75P.$$

O b s e r v a Ț i e. Sensurile pentru V_1, V_2, V_3, V_7, V_8 , corespund celor de pe figură. Sensul pentru V_6 este invers celui arătat în figură. Pentru reacțiunile V_9 și V_5 , sensul depinde de valorile relative ale mărimilor P și pa .

2°. Se consideră sistemul format din barele OA și OB de lungimi l și greutatea G , articulate între ele în O și rezemate cu frecare pe un plan orizontal în A (coeficient de frecare μ_1) și în B (coeficientul de frecare μ_2) (fig. 8.2). Se cere să se determine unghiul α corespunzător poziției limită de echilibru. (Se neglijează frecarea din articulația O).

R e z o l v a r e. Separăm cele două bare OA și OB din sistemul dat și introducem forțele date (greutățile G), reacțiunile (normale N_1 și N_2 și tangențiale de frecare, T_1 și T_2) și forțele interioare (H și V din articulația O) (fig. 8.2, b). Vom scrie ecuațiile de proiecții și de momente (în raport cu O) pentru ambele bare. Obținem

pentru bara OA : $T_1 - H = 0, N_1 + V - G = 0, T_1 l \sin \alpha + G \frac{l}{2} \cos \alpha - N_1 l \cos \alpha = 0;$
 pentru bara OB : $-T_2 + H = 0, N_2 - V - G = 0, -T_2 l \sin \alpha - G \frac{l}{2} \cos \alpha + N_2 l \cos \alpha = 0.$ (1)

S-au obținut șase ecuații cu șapte necunoscute ($N_1, T_1, N_2, T_2, H, V, \alpha$). Problema este nedeterminată. Într-adevăr există o infinitate de poziții de echilibru posibile. Dacă ne interesează poziția de echilibru la limită va trebui să scriem că una din forțele de frecare, sau amândouă, au atins valoarea limită. Acestor posibilități de scriere a condițiilor suplimentare de echilibru, le corespund trei posibilități de pierdere a echilibrului, reprezentate în fig. 8.3, a, b și c. Dacă se deplasează ambele capete A și B (fig. 8.3, a), atunci avem, ca ecuații suplimentare

$$T_1 = \mu_1 N_1, \quad T_2 = \mu_2 N_2.$$

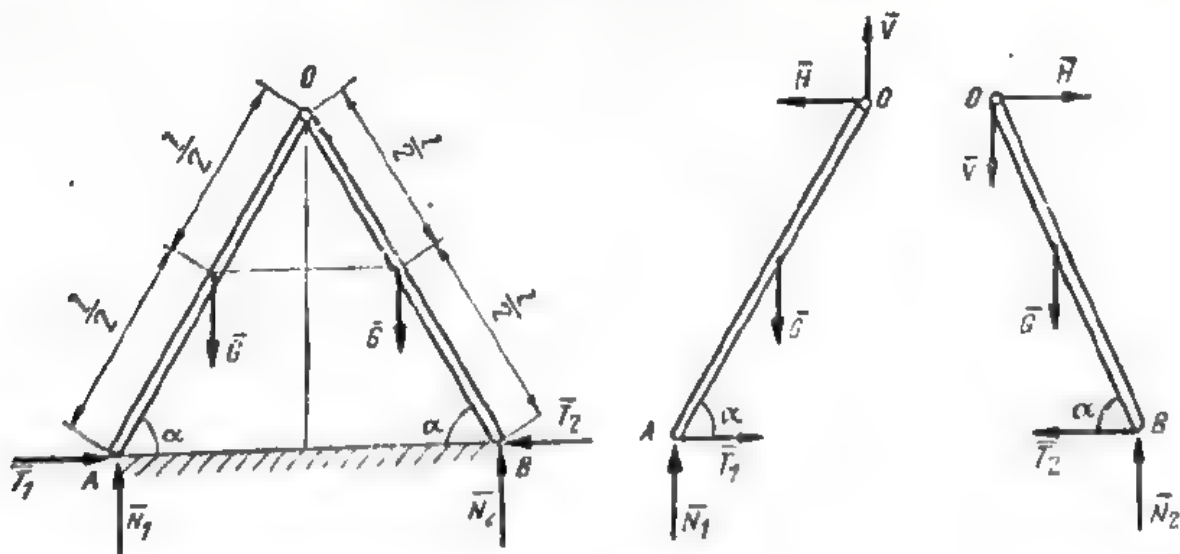


Fig. 8.2

Adăugând aceste două ecuații, la cele șase ecuații (1) obținem soluțiile: $N_1 = N_2 = G, V = 0,$
 $H = T_1 = T_2 = \mu_1 G - \mu_2 G, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}.$ Această pierdere respectiv a poziției de echilibru nu este posibilă decât dacă $\mu_1 = \mu_2$, deci dacă cei doi coeficienți de frecare sînt egali.

Dacă se deplasează numai capătul B (fig. 8.3, b) atunci avem condițiile suplimentare

$$T_1 < \mu_1 N_1 \quad T_2 = \mu_2 N_2.$$

Aceste condiții, adăugate la cele șase ecuații (1) conduc la următoarele soluții:

$$N_1 = N_2 = G, \quad V = 0, \quad H = T_1 = T_2 = \mu_2 G, \quad \tan \alpha = \frac{\mu_1}{2}, \quad \mu_2 G < \mu_1 G,$$

respectiv $\mu_2 < \mu_1$. Deci această situație se întâlnește în cazul când coeficientul de frecare de alunecare din B este mai mic decât cel din A . Analog se poate arăta că, în cazul când

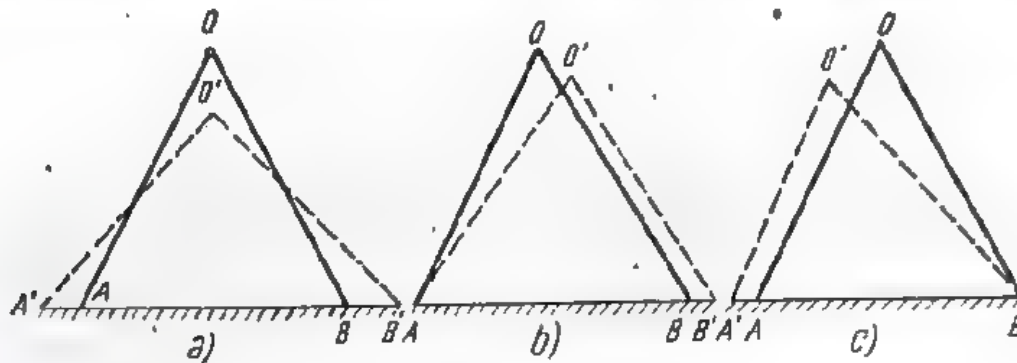


Fig. 8.3

$\mu_1 < \mu_2$, pierderea poziției de echilibru are loc așa cum se arată în fig. 8.3, c și că, în acest din urmă caz

$$N_1 = N_2 = G, \quad V = 0, \quad H = T_1 = T_2 = \mu_1 G, \quad \tan \alpha = \frac{\mu_1}{2}.$$

3°. Se consideră cadrul $ABCD$ din fig. 8.4, a articulat în A, B, C și încastrat în D . Se cere să se determine reacțiunile din articulația A și din încastrarea D .

R e z o l v a r e. Înlocuind articulația A cu reacțiunile H_1 și V_1 și încastrarea D cu reacțiunile H_2, V_2 și momentul M_2 (fig. 8.4, b) observăm că avem în total cinci necunoscute. Dacă am separa barele AB, BC și CD , și am scrie ecuațiile de echilibru pentru fiecare

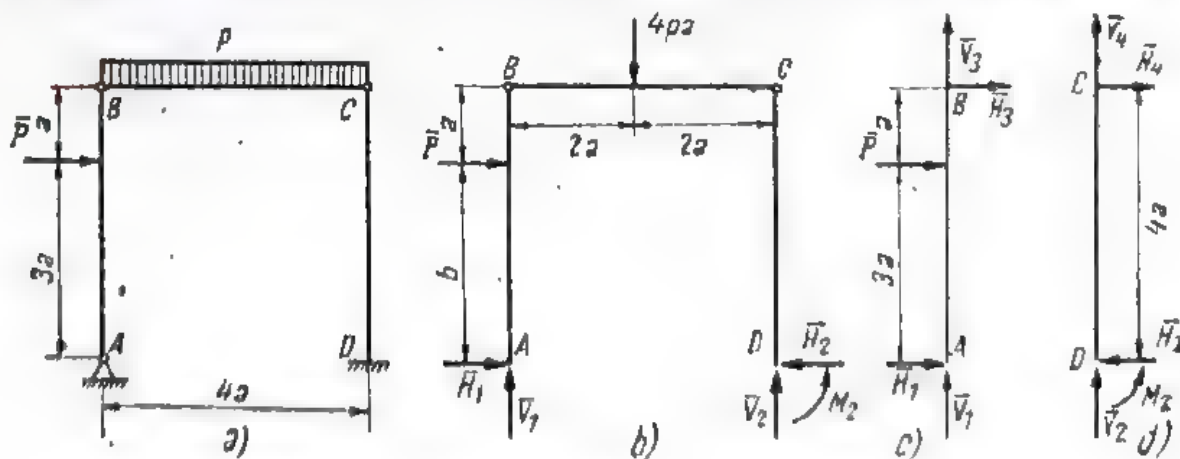


Fig. 8.4

bară în parte am obține în total nouă ecuații. Ar apărea însă patru necunoscute în plus, care nu interesează în problemă: reacțiunile H_3 și V_3 din articulația B și reacțiunile H_4 și V_4 din articulația C . Pentru a le elimina și a rămâne numai cu cinci ecuații, care să con-

țină necunoscutele cerute de problemă, vom aplica teorema solidificării. Vom scrie ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem (momente în raport cu D , fig. 8.4, b):

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 + P &= 0, & V_1 + V_2 - 4pa &= 0 \\ 4pa \cdot 2a - P \cdot 3a - V_1 4a + M_2 &= 0, \end{aligned}$$

izolind bara AB (fig. 8.4, c) au apărut reacțiunile H_2 și V_2 , care nu interesează. Pentru a le elimina scriem ecuația de momente în raport cu punctul D . Rezultă:

$$Pa + H_1 \cdot 4a = 0.$$

În mod asemănător vom proceda cu bara CD (fig. 8.4, d), pentru care vom scrie ecuația de momente în raport cu punctul C . Rezultă

$$M_2 - H_2 \cdot 4a = 0,$$

Am obținut astfel în total cinci ecuații care conțin numai necunoscutele care ne interesează. Rezolvând acest sistem obținem

$$H_1 = -\frac{P}{4}, \quad H_2 = \frac{3P}{4}, \quad M_2 = 3Pa, \quad V_1 = 2pa, \quad V_2 = 2pa.$$

Observație. Reacțiunea H_1 are sensul invers celui indicat pe desen.

§ 6. Determinarea eforturilor într-o bară. În general, numim bară un corp la care o dimensiune, numită lungime, este mare în raport cu celelalte două dimensiuni. Locul geometric al centrelor de greutate ale tuturor secțiunilor transversale prin bară se numește *axa barei*. Secțiunile transversale sînt normale la axa barei, în centrul de greutate al secțiunii.

Să considerăm o bară ABC (fig. 8.5). Ea este în echilibru sub acțiunea sistemului (S) de forțe date și reacțiuni. Pentru a putea pune în evidență eforturile din bară, este necesar s-o secționăm în două părți, printr-un plan (de obicei normal pe axa barei într-un punct B) (fig. 8.6). În acest mod, forțele interioare care legau fiecare element al corpului AB de pe fața corespunzătoare secțiunii, cu elementele corpului BC de pe cealaltă față a secțiunii, s-au transformat pentru fiecare porțiune în parte în forțe exterioare. Să folosim pentru aceste două sisteme de forțe notațiile;

(S_{21}) pentru forțele cu care corpul I acționează în secțiunea B asupra corpului II ;

(S_{12}) pentru forțele cu care corpul II acționează în secțiunea B , asupra corpului I .

Sistemul (S) de forțe date și reacțiuni, poate fi de asemenea despărțit în sistemele (S_1) și (S_2) care acționează respectiv asupra corpurilor I și II .

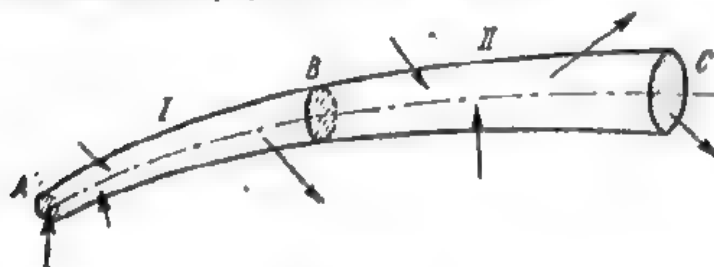


Fig. 8.5

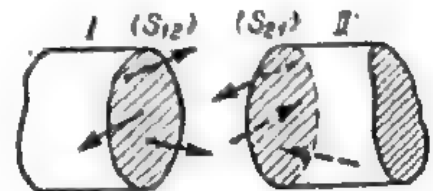


Fig. 8.6

Conform teoremei echilibrului părților, dacă întreaga bară este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci și cele două părți ale ei vor fi în echilibru fiecare, sub acțiunea forțelor corespunzătoare.

Prin urmare torsorul rezultat al sistemelor (S_1) și (S_{12}) este nul. De asemenea și torsorul rezultat al sistemelor (S_2) și (S_{21}) .

Bara AC fiind în echilibru, sistemul (S) este echivalent cu zero. Urmează că și torsorul sumă al sistemelor (S_{12}) și (S_{21}) este nul.

Concretizînd cele arătate, în relații de echivalență statică, putem scrie:

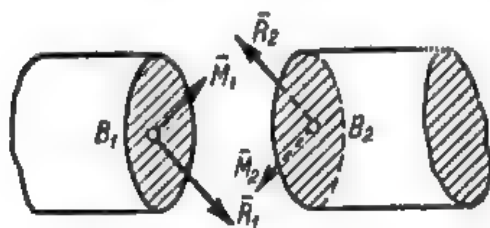


Fig. 8.7

$$\tau(S_1) + \tau(S_{12}) = 0; \quad \tau(S_2) + \tau(S_{21}) = 0; \quad (8.6)$$

$$\tau(S_1) + \tau(S_2) = 0; \quad (8.7)$$

de unde

$$\tau(S_{12}) + \tau(S_{21}) = 0. \quad (8.8)$$

Remarcăm că ultima relație generalizează principiul acțiunii și reacțiunii.

Rezultă mai departe

$$\tau(S_{21}) = \tau(S_1), \quad \tau(S_{12}) = \tau(S_2), \quad (8.9)$$

sau: sistemul de eforturi cu care o parte a barei acționează asupra celeilalte părți, este echivalent cu sistemul de forțe exterioare (forțe date și reacțiuni) corespunzător primei părți. Ultimele relații de echivalență ne dau posibilitatea de a determina eforturile dintr-o secțiune, atunci când se cunosc forțele date și reacțiunile care acționează asupra grinzii.

Să reducem sistemele de forțe (S_{12}) și (S_{21}) în raport cu punctele B_1 și B_2 ale fețelor secțiunii (B_1 și B_2 corespund aceluiași punct B al secțiunii) (fig. 8.7). Vom obține câte un torsor $\tau(S_{12}) = (\bar{M}_1, \bar{R}_1)$ și $\tau(S_{21}) = (\bar{M}_2, \bar{R}_2)$ aplicat respectiv în B_1 și B_2 . Suma acestor doi torsori este bineînțeles nulă.

Vectorii \bar{R}_1 și \bar{R}_2 nu depind de poziția punctului B de reducere, spre deosebire de vectorii \bar{M}_1 și \bar{M}_2 . În general punctul B de reducere se ia în centrul de greutate al secțiunii, însă există în practică și unele cazuri speciale, când se alege altă poziție pentru acest punct.

În aplicații, torsorul forțelor interioare se determină prin valorile scalare ale proiecțiilor pe un triedru triortogonal intrinsec, cu originea în centrul de greutate al secțiunii. Aceste proiecții poartă numele de *eforturi*. Admițînd un sens de parcurgere a barei, se convine a se lua în considerație eforturile aplicate pe acea față a secțiunii care este întîlnită mai întîi, atunci când bara este parcursă în sensul ales. Axele se aleg de obicei după direcția tangentei, normalei principale și binormalei la axa barei. Sensul pozitiv al tangentei se alege în sensul parcurgerii barei (fig. 8.8).

Componentele torsorului eforturilor după tangenta la axa barei și după o direcție conținută în planul secțiunii normale poartă denumiri speciale, corespunzătoare sensului fizic de sollicitare a secțiunii.

Astfel (fig. 8.9), aceste componente ale rezultantei \bar{R} și momentului rezultat \bar{M} , se numesc:

- forță normală (simbol N), componenta lui \bar{R} după direcția tangentei;
- forță tăietoare (simbol T), componenta lui \bar{R} în planul secțiunii;

— moment de răsucire (simbol M_t), componenta lui \bar{M} după direcția tangentei;

— moment încovoietor (simbol M_i), componenta lui \bar{M} în planul secțiunii.

Proiecțiile forței tăietoare și momentului încovoietor pe normala principală și pe binormală se notează cu T_v , T_β și M_v , M_β (fig. 8.9).

Privitor la semnele acestor eforturi se convine ca să fie pozi-

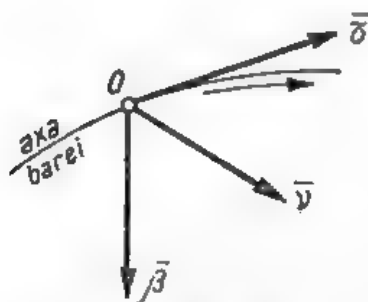


Fig. 8.8

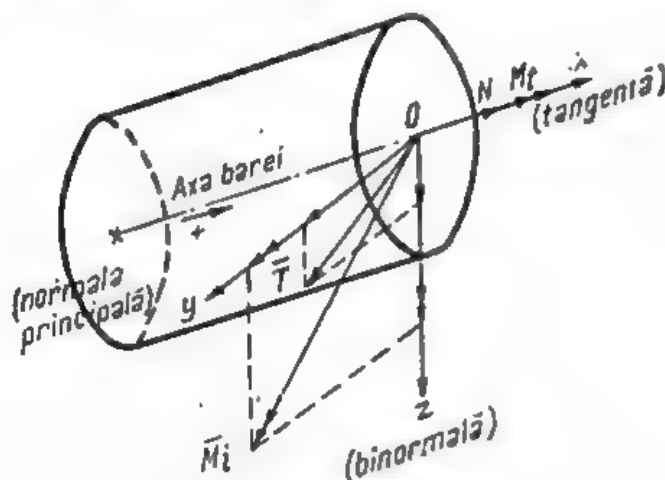


Fig. 8.9

tive atunci când sînt dirijate după sensul pozitiv al axelor. În felul acesta $\bar{\tau}$, \bar{v} , $\bar{\beta}$ fiind versorii axelor, putem scrie:

$$\bar{K} = N\bar{\tau} + T_v\bar{v} + T_\beta\bar{\beta}, \quad \bar{M} = M_t\bar{\tau} + M_v\bar{v} + M_\beta\bar{\beta}. \quad (8.18)$$

Se obișnuiește ca variația acestor șase componente ale torsorului eforturilor să se reprezinte prin diagrame, care indică valorile lor în orice secțiune.

Observații. 1° Convenția cu privire la sensurile pozitive ale eforturilor este valabilă, în forma de mai sus, pentru fața secțiunii care este întâlnită mai întâi atunci când grinda este parcursă în sensul considerat pozitiv. În rezistența materialelor se consideră ca sens pozitiv sensul de la „stînga la dreapta”. Ca urmare convenția de mai sus rămîne valabilă pentru fața „din stînga” a secțiunii.

2° În rezistența materialelor se obișnuiește însă ca eforturile să fie definite pentru fața „din dreapta” a secțiunii. În acest din urmă caz sensurile pozitive ale eforturilor coincid cu sensurile negative ale axelor triedrului de referință intrinsec, corespunzător feței „din dreapta”.

3° Însfîșit, în rezistența materialelor se mai obișnuiește să se folosească sistemul de referință stîng în locul celui drept. Ca urmare, sensurile pozitive ale eforturilor față de un asemenea triedru, pe fața „din dreapta” sînt: pentru N , T_v , T_β , sensurile negative ale axelor, iar pentru M_t , M_v , M_β , sensurile pozitive ale axelor (v. P. Mazilu: Statica Construcțiilor, vol. I, Edit. Tehnică, 1955).

Aplicație. 4°. Se dă o grindă ACB rotită în unghi drept (fig. 8.10), încastrată în B și acționată de o forță P perpendiculară pe planul ei. Se cere să se deseneze diagramele eforturilor.

Convenim ca sensul pozitiv de parcurgere al sistemului să fie ACB. Facem secțiuni, atât în bara AC, cît și în CB și introducem pe fețele secțiunilor întâlnite în sensul parcurgerii, componentele respective ale eforturilor.

Pentru sistemul și forțele date, M_s , T_y și N sînt nule.

Utilizând prima dintre relațiile (8.9) obținem pentru bara AC ,

$$M_t = 0, \quad M_y = M_t = -Px, \quad T_z = T = -P,$$

Iar pentru bara CB

$$M_t = -Pa, \quad M_y = M_t = -Px', \quad T_z = T = -P.$$

Variația eforturilor M_t , M_y și T este reprezentată în diagramele din fig. 8.10 d, e, f .

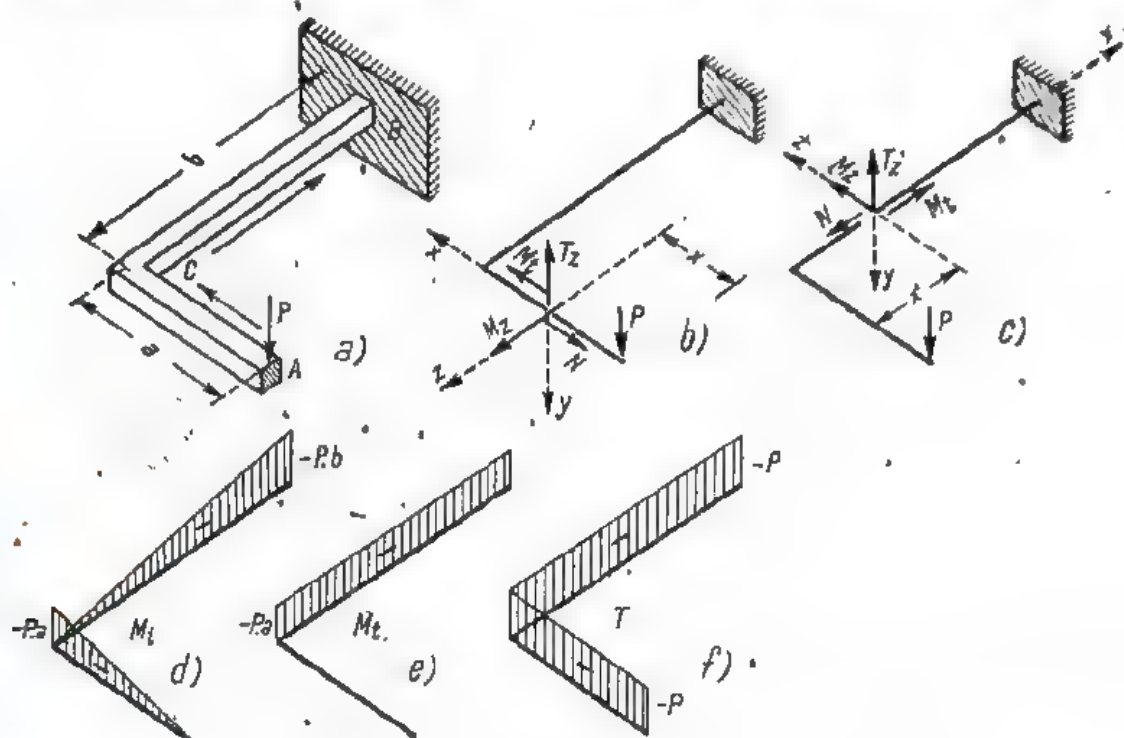


Fig. 8.10

§ 7. Relații diferențiale între eforturi și încărcări. La punctul precedent, s-a arătat modul de calcul al eforturilor într-o secțiune oarecare a unei bare. Aceste eforturi variază însă în lungul barei în raport cu poziția secțiunii. Apare indicată, deci, necesitatea de a se stabili relațiile generale care să pună în evidență această variație.

Referindu-ne la porțiunea AB a barei din fig. 8.5 constatăm că aceasta este acționată de următoarele forțe: *forțele date* (concentrate și repartizate), *reacțiunile* de pe fața A , reduse la o rezultantă — \bar{R}_A și un moment resultant — \bar{M}_A față de punctul A , *eforturile* de pe fața B , reduse față de punctul B la rezultanta \bar{R} și momentul \bar{M} .

Vom considera că:

a) înlocuim toate forțele date concentrate prin forțe repartizate echivalente, presupunând că secțiunea B nu cade exact în dreptul punctului de aplicare al unei forțe concentrate;

b) reducem toate forțele date în raport cu punctele de pe axă corespunzătoare secțiunilor în care acționează aceste forțe.

În acest mod, porțiunea de bară AB (fig. 8.11) se poate reprezenta numai prin axa ei. Să considerăm un element $d\sigma$ din această axă. Fie $\bar{p}(\sigma)d\sigma$ și $\bar{m}(\sigma)d\sigma$ rezultanta și momentul resultant față de un punct al elementului

$d\sigma$, al forțelor repartizate care acționează porțiunea de grindă limitată de două secțiuni transversale care trec prin extremitățile elementului $d\sigma$. Alegînd ca sens de parcurgere al axei sensul AB și notînd cu σ lungimea arcului pe axă, măsurată de la A la $d\sigma$, vom avea în A , $\sigma=0$, în dreptul elementului $d\sigma$, $\sigma=\sigma$ iar în B , $\sigma=s$.

Pentru a arăta că porțiunea de grindă AB este în echilibru, este necesar și suficient să scriem că suma momentelor acestor forțe este nulă față de orice punct al spațiului.

Notînd cu $\vec{r}(0)$, $\vec{r}(s)$, vectorii de poziție ai punctelor A , B față de un reper oarecare, și cu $\vec{r}(\sigma)$ vectorul de poziție al elementului de curbă $d\sigma$, vom avea

$$\vec{r}(0) \times (-\vec{R}_A) - \vec{M}_A + \int_0^s [\vec{r}(\sigma) \times \vec{p}(\sigma) d\sigma + \vec{m}(\sigma) d\sigma] + \vec{r}(s) \times \vec{R} + \vec{M} = 0. \quad (8.11)$$

Relația de mai înainte, fiind independentă de valoarea parametrului s , face ca derivata ei în raport cu s să fie nulă

$$\vec{r}(s) \times \vec{p}(s) + \vec{m}(s) + \vec{r}(s) \times \frac{d\vec{R}}{ds} + \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \times \vec{R} + \frac{d\vec{M}}{ds} = 0. \quad (8.12)$$

Înlocuind $\frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ cu $\vec{\tau}(s)$, vectorul unitar al tangentei la axă în punctul B (v. cap. I, § 29–30), și punînd în evidență pe $\vec{r}(s)$ ca factor comun, obținem

$$\vec{r}(s) \times \left[\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p}(s) \right] + \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{\tau}(s) \times \vec{R} + \vec{m}(s) = 0. \quad (8.13)$$

Condiția de echilibru a porțiunii de grindă AB este valabilă pentru orice origine a vectorului de poziție $\vec{r}(s)$. Acest lucru nu este posibil decît dacă

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (8.14)$$

și

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{\tau} \times \vec{R} + \vec{m} = 0. \quad (8.15)$$

Folosind proiecțiile lui \vec{R} , \vec{M} și \vec{p} pe axele intrinseci, pentru secțiunea întilnită în față, în sensul pozitiv de parcurgere al axei

$$\begin{aligned} \vec{R} &= N\vec{\tau} + T_v\vec{v} + T_\beta\vec{\beta}, \\ \vec{M} &= M_1\vec{\tau} + M_v\vec{v} + M_\beta\vec{\beta}, \\ \vec{p} &= p_\tau\vec{\tau} + p_v\vec{v} + p_\beta\vec{\beta} \end{aligned} \quad (8.16)$$

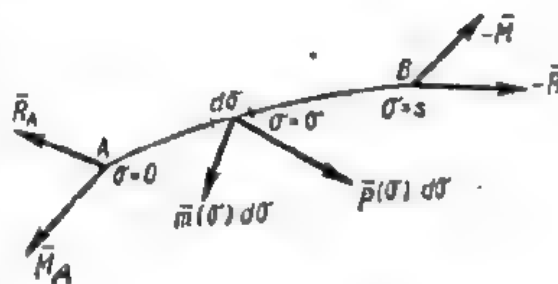


Fig. 8.11

și formulele lui Frenet care dau expresiile derivatelor versorilor $\vec{\tau}$, \vec{v} și $\vec{\beta}$ în raport cu arcul s (cap. I, § 29–30)

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \vec{\tau} + \frac{1}{\rho_1} \vec{\beta}, \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\frac{1}{\rho_1} \vec{v}, \quad (8.17)$$

unde prin ρ și ρ_1 s-au notat respectiv raza de curbură și raza de torsiune a axei barei, obținem șase relații scalare de echilibru, corespunzătoare relațiilor vectoriale (8.14) și (8.15)

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} - \frac{T_v}{\rho} + p_r = 0, \quad \frac{dT_v}{ds} + \frac{N}{\rho} - \frac{T_\beta}{\rho_1} + p_v = 0, \quad \frac{dT_\beta}{ds} + \frac{T_v}{\rho_1} + p_\beta = 0, \\ \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_v}{\rho} + m_r = 0, \quad \frac{dM_v}{ds} + \frac{M_t}{\rho} - \frac{M_\beta}{\rho_1} - T_\beta + m_v = 0, \\ \frac{dM_\beta}{ds} + \frac{M_v}{\rho_1} + T_v + m_\beta = 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Pentru cazul barelor curbe plane, acționate de forțe cuprinse în planul lor, $\rho_1 = \infty$, $p_\beta = 0$, $m_r = m_v = 0$, $T_\beta = 0$, $M_t = M_v = 0$, formulele (8.18) devin

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_v}{\rho} + p_r = 0, \quad \frac{dT_v}{ds} + \frac{N}{\rho} + p_v = 0, \quad \frac{dM_\beta}{ds} + T_v + m_\beta = 0. \quad (8.19)$$

Pentru cazul barelor curbe plane, acționate de forțe normale pe planul lor, $\rho_1 = \infty$, $p_r = p_v = 0$, $m_\beta = 0$, $N = 0$, $T_v = 0$, $M_\beta = 0$, formulele (8.18) devin

$$\frac{dT_\beta}{ds} + p_\beta = 0, \quad \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_v}{\rho} + m_r = 0, \quad \frac{dM_v}{ds} + \frac{M_t}{\rho} - T_\beta + m_v = 0. \quad (8.20)$$

Pentru cazul barelor drepte, direcțiile normalei principale și binormalei sînt nedeterminate. În acest caz axele din planul secțiunii pot fi alese arbitrar și se poate folosi un triedru cartezian obișnuit $Oxyz$, astfel ales încît Ox să coincidă cu axa barei, Oy cu normala principală, iar Oz cu binormala. Se recomandă ca axa Oz să fie verticală. În acest caz $\rho = \rho_1 = \infty$, $ds = dx$ și, schimbînd indicii în formulele (8.18), obținem

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + p_x = 0, \quad \frac{dT_y}{dx} + p_y = 0, \quad \frac{dT_z}{dx} + p_z = 0, \\ \frac{dM_t}{dx} + m_x = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} - T_z + m_y = 0, \quad \frac{dM_z}{dx} + T_y + m_z = 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

În sfîrșit, în cazul foarte frecvent întîlnit în practică, al unei bare drepte acționate de forțe plane normale pe axa grinzii, presupunînd că ele acționează în direcția axei Oz , rezultă $p_x = p_y = 0$, $m_x = m_y = m_z = 0$, $N = 0$, $T_y = 0$, $M_t = 0$, $M_z = 0$ și formulele precedente (8.20), devin

$$\frac{dT_z}{dx} + p_z = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} - T_z = 0. \quad (8.22)$$

§ 8. Sisteme articulate. Definiții. Clasificări. Ipoteze. Una dintre formele cele mai des întîlnite în practică a sistemelor de corpuri o reprezintă sistemele articulate. Numim în general *sistem articulat*, un sistem de bare rectilinii și rigide, care sînt legate între ele prin articulații, numite *noduri*. În cele ce urmează se vor considera numai sistemele articulate la care între bare există o legătură continuă.

Putem deosebi: 1) sisteme articulate la care configurația geometrică a acestora reprezintă o linie poligonală deschisă, astfel că nu se poate suprima nici o bară (nemarginală), fără a se întrerupe continuitatea sistemului; 2) sisteme articulate la care este posibil să se suprimă o bară (nemarginală), fără a se întrerupe continuitatea sistemului.

Sisteme din prima categorie se întâlnesc sub forma poligoanelor articulate, a cablurilor de susținere a podurilor suspendate etc. Sisteme din a

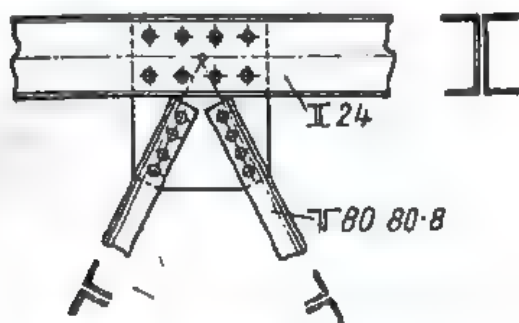


Fig. 8.12

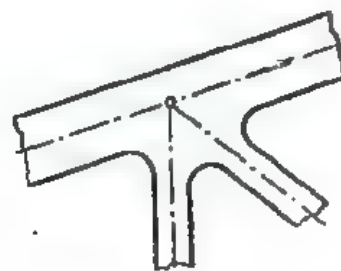


Fig. 8.13

două categorii sînt: grinzi cu zăbrele, arce cu zăbrele, ferme de acoperiș, turnuri metalice, macarale, cupole cu zăbrele etc.

Sistemele articulate se mai pot clasifica în sisteme plane și sisteme spațiale. Numim *sistem articulat plan*, sistemul ale cărui noduri sînt situate într-un singur plan, forțele exterioare acționînd de asemenea în același plan. La *sistemul articulat spațial*, nodurile și forțele exterioare nu sînt situate în același plan.

În calculul sistemelor articulate, vom admite că:

a) Barele care alcătuiesc sistemul sînt rectilinii și au secțiuni transversale de dimensiuni neglijabile în raport cu lungimea lor. În modul acesta barele pot fi reprezentate prin axele lor rectilinii.

b) Legătura între bare, la noduri, se face fără frecare, prin articulații foarte mici, astfel că acestea pot fi considerate ca puncte materiale. Urmează că acțiunea exercitată de restul sistemului asupra unei bare, prin intermediul unui nod, se poate reduce la o singură forță aplicată acelui nod.

În practică, legăturile dintre bare sînt realizate fie prin îmbinări năuuite (fig. 8.12) sau sudate, la grinzi cu zăbrele metalice, fie prin continuitate perfectă la grinzi cu zăbrele din beton armat (fig. 8.13), fie prin articulații metalice la unele construcții speciale și la organele de mașini (fig. 8.14). În orice caz, însă, nu este posibil a se obține, în realitate, articulații fără frecări, iar secțiunile barelor au dimensiuni care nu pot fi totdeauna neglijate. Din această cauză, în bare se nasc și eforturi secundare. Determinarea acestor eforturi se face prin metode speciale.



Fig. 8.14

La un sistem articulat, forțele se aplică în general atît pe bare cît și pe noduri. Un deosebit interes prezintă cazul cînd forțele acționează numai la noduri, deoarece, în aceste condiții, fiecare bară este supusă numai la întindere sau la compresie, așa cum se va vedea mai departe. În sistemele

articulate realizate în practică, se caută ca forțele exterioare să acționeze numai la noduri. Cu toate acestea, există cazuri când acest lucru nu este posibil. Menționăm în deosebi: greutatea proprie a barelor, acțiunea vântului etc. În cazurile obișnuite, se admite că asemenea sarcini pot fi înlocuite cu două forțe echivalente, acționând la extremitățile barei, neglijându-se în

modul acesta numai efectul de încovoiere al acestor sarcini.

§ 9. Echilibrul sistemelor articulate. Determinarea eforturilor din bare. S-a văzut că, pentru ca un sistem de corpuri rigide să fie în echilibru, este necesar și suficient ca fiecare parte a sa să fie în echilibru. Considerând că un sis-

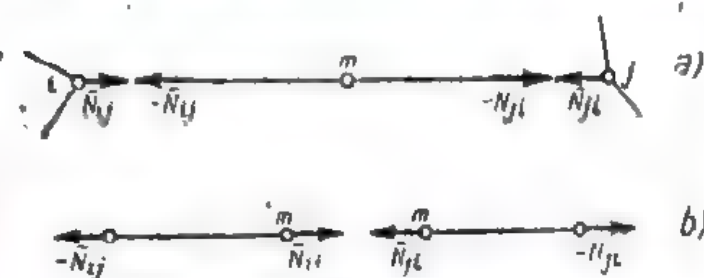


Fig. 8.15

tem articulat este format din bare și noduri, putem enunța două categorii de condiții de echilibru:

a) *Condiții care exprimă că fiecare bară este în echilibru sub acțiunea forțelor care îi sînt aplicate.* Deoarece toate forțele exterioare se aplică la noduri, o bară ij (fig. 8.15) va fi acționată numai de forțele de legătură ce se exercită din partea nodurilor i și j . Convenim să notăm cu \bar{N}_{ij} și \bar{N}_{ji} forțele respective de legătură aplicate la nodurile i și j . În consecință, forțele de legătură aplicate la capetele barei vor fi $-\bar{N}_{ij}$ și $-\bar{N}_{ji}$.

Este evident că bara ij va fi în echilibru sub acțiunea forțelor $-\bar{N}_{ij}$ și $-\bar{N}_{ji}$, numai dacă acestea sînt egale și de sens contrar, avînd aceeași linie de acțiune, dirijată după axa barei.

Forțele de legătură între bară și nod se numesc *eforturi în bară*.

Privitor la sensul eforturilor \bar{N} , există două posibilități. Dacă eforturile care acționează asupra barei tind să mărească lungimea acesteia, se numesc *eforturi de întindere* (fig. 8.16, a), iar dacă tind să-i micșoreze lungimea, se numesc *eforturi de compresie* (fig. 8.16, b). Vom conveni să afectăm valorile scalare ale eforturilor în bară, cu semnul $+$ pentru întindere și cu semnul $-$ pentru compresie.

La operațiile de determinare a eforturilor în bare se lucrează cu eforturile aplicate la nod și nu cu acelea aplicate pe bară, deoarece, după cum se va arăta mai departe, aceste eforturi se determină din ecuațiile de echi-



Fig. 8.16



Fig. 8.17

libru ale nodurilor. Urmează că o reprezentare a eforturilor aplicate la nod, ca în fig. 8.17, a ne va indica o bară întinsă, iar ca în fig. 8.17, b, o bară comprimată.

Efortul într-o bară are aceeași valoare în orice secțiune a barei. Într-adevăr, dacă secționăm bara ij (fig. 8.15, b) în punctul m , condițiile de

echilibru ale ambelor porțiuni izolate, ne arată că eforturile în secțiunea m sînt aceleași indiferent de poziția de-a lungul barei a acestei secțiuni.

b) *Condiții care exprimă că fiecare nod este în echilibru sub acțiunea forțelor care îi sînt aplicate.* Asupra unui nod i acționează rezultanta \bar{F}_i a forțelor exterioare efectiv aplicate, reacțiunea \bar{R}_i , care înlocuiește o eventuală legătură exterioară a nodului și eforturile \bar{N}_{ij} din barele care leagă nodul i , de celelalte noduri j , ale sistemului articulat.

Considerînd că sistemul articulat are n noduri, ecuațiile vectoriale de echilibru ale acestor noduri vor fi

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i + \sum_j \bar{N}_{ij} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n; i \neq j), \quad (8.23)$$

prin semnul Σ_j înțelegîndu-se însumarea termenului al treilea pentru toate nodurile j care sînt legate direct prin bare, de nodul i .

Prin proiectarea sistemului de ecuații (8.23) pe trei axe ortogonale de coordonate x, y, z , se obține un sistem de trei ecuații scalare liniare

$$\left. \begin{aligned} \sum_j N_{ij} \lambda_{ij} + R_{ix} &= -X_i, \\ \sum_j N_{ij} \mu_{ij} + R_{iy} &= -Y_i, \\ \sum_j N_{ij} \nu_{ij} + R_{iz} &= -Z_i, \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n; i \neq j) \quad (8.24)$$

unde $\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}$ sînt proiecțiile pe axele de coordonate ale versorului barei ij , R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} sînt proiecțiile necunoscute ale reacțiunilor \bar{R}_i , iar X_i, Y_i, Z_i sînt proiecțiile forțelor \bar{F}_i pe aceleași axe. Așa cum s-a mai spus, valorile N_{ij} ale eforturilor se socotesc, în mod convențional, pozitive pentru întindere și negative pentru compresiune.

Menționăm că, deoarece între proiecțiile pe cele trei axe ale unei reacțiuni pot exista două, una sau nici o relație suplimentară, după cum legătura exterioară respectivă este o rezemare simplă, o articulație plană sau o articulație spațială, vom considera că în ecuațiile (8.24) se introduc numai componentele efectiv necunoscute ale reacțiunilor, celelalte componente fiind anterior eliminate cu ajutorul relațiilor menționate. În acest fel, pentru o rezemare simplă vom avea o singură necunoscută, pentru o articulație plană, două, iar pentru o articulație spațială trei necunoscute ale reacțiunii.

Necunoscutele sistemului (8.24) de ecuații sînt eforturile N_{ij} și proiecțiile R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} ale reacțiunilor. Pozițiile barelor date prin coeficienții $\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}$ sînt considerate cunoscute, dacă configurația geometrică a sistemului articulat este de așa natură, încît nu este permisă nici o deplasare finită a barelor una față de alta, adică dacă sistemul articulat este rigid.

Dacă sistemul nu este rigid, atît pozițiile barelor, cît și componentele X_i, Y_i, Z_i ale forțelor efectiv aplicate, vor fi considerate drept parametri a căror valoare urmează să fie determinată astfel încît sistemul articulat să fie în echilibru.

Observație. Pentru un sistem articulat în echilibru, teorema solidificării ne arată că între forțele exterioare (forțe date și reacțiuni), există șase ecuații scalare de echilibru

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(R_{ix} + X_i) &= 0, \quad \Sigma(R_{iy} + Y_i) = 0, \quad \Sigma(R_{iz} + Z_i) = 0, \\ \Sigma[x_i(R_{iy} + Y_i) - y_i(R_{ix} + X_i)] &= 0, \\ \Sigma[y_i(R_{iz} + Z_i) - z_i(R_{iy} + Y_i)] &= 0, \\ \Sigma[z_i(R_{ix} + X_i) - x_i(R_{iz} + Z_i)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

După cum se poate observa foarte ușor, aceste ecuații suplimentare sînt consecințe algebrice ale ecuațiilor (8.24).

Sistemul de ecuații (8.24) poate avea o soluție determinată, o infinitate de soluții, sau nici una. În primele două cazuri, sistemul (8.24) se numește compatibil. Vom discuta rezolvarea acestui sistem, utilizînd teorema lui Kronecker-Capelli¹.

Condiția necesară și suficientă de compatibilitate a unui sistem de ecuații liniare, este ca rangul matricii coeficienților să fie egal cu rangul matricii sistemului. Matricea sistemului se obține prin adăugarea coloanei termenilor liberi la matricea coeficienților.

Fie p rangul comun al acestor două matrici, b numărul barelor sistemului articulat și r numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor. Deoarece numărul necunoscutelor sistemului (8.24) este $b+r$, vom avea

$$p \leq b+r, \quad (8.26)$$

$$p \leq 3n. \quad (8.27)$$

Ca urmare a acestor inegalități, discuția rezolvării unui sistem articulat prezintă patru cazuri:

$$a) \quad p < b+r. \quad (8.28)$$

Fie $q = b+r-p$ numărul necunoscutelor care nu aparțin unui determinant principal al sistemului (determinant format din matricea coeficienților, diferit de zero și de ordin p). Aceste q necunoscute pot avea valori arbitrare, iar celelalte necunoscute care se determină după regula lui Cramer, sînt funcții liniare de cele q necunoscute arbitrare.

Sistemul articulat respectiv se numește *sistem static nedeterminat*. Numărul q al necunoscutelor suplimentare se numește *grad de nedeterminare statică*.

Datorită relațiilor (8.26) și (8.27) o condiție suficientă pentru ca un sistem articulat să fie static nedeterminat este ca

$$3n < b+r. \quad (8.29)$$

Remarcăm că sistemul de ecuații omogene care se obține în cazul inegalității (8.26) prin anularea termenilor liberi ai ecuațiilor (8.24), are ∞^q soluții diferite de zero. Urmează că într-un sistem static nedeterminat sînt posibile eforturi în bare și reacțiuni, chiar în absența oricăror forțe efectiv aplicate sistemului.

Eforturile în barele unui sistem static nedeterminat se pot determina prin metode utilizate în disciplinele rezistența materialelor și statica construcțiilor. Ecuațiile suplimentare necesare pentru aceasta, se stabilesc considerîndu-se proprietățile de deformabilitate ale materialului din care sînt confecționate barele.

$$b) \quad p = b+r. \quad (8.30)$$

Sistemul de ecuații (8.24) care satisface relația precedentă admite o singură soluție. Sistemul articulat corespunzător se numește *sistem static determinat*.

Un sistem articulat, static nedeterminat, se poate transforma într-un sistem static determinat, suprimîndu-i-se, în mod convenabil, cel puțin q bare și componente necunoscute ale reacțiunilor. Numărul de bare și de componente necunoscute ale reacțiunilor suprimate în acest scop este minim, dacă prin aceasta nu se micșorează p .

$$c) \quad p < 3n. \quad (8.31)$$

O consecință a teoremei lui Kronecker-Capelli afirmă că un sistem de ecuații liniare este compatibil atunci și numai atunci cînd toți determinanții săi caracteristici sînt nuli. Se numește determinant caracteristic al unui sistem de ecuații liniare, determinantul format prin adăugarea la un determinant principal al sistemului, a unei coloane formate din termenii liberi ai ecuațiilor și a unei linii a matricii sistemului.

Fiind cunoscut un determinant principal, se pot forma cu ajutorul acestuia $p-3n-p$ determinanți caracteristici diferiți. Prin anularea acestor p determinanți, se obțin p relații

¹ Vezi A. G. Kuroș, Curs de algebră superioară, (traducere din limba rusă) București, Editura Tehnică, 1955.

² Vezi A. G. Kuroș, op. cit.

între coeficienții necunoscutelor și între termenii liberi, adică între mărimile geometrice care determină pozițiile barelor și direcțiile reacțiilor și între componentele forțelor efectiv aplicate în noduri. Aceste relații sînt necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații să fie compatibil și deci pentru ca sistemul articulat să fie în echilibru.

Este deci necesar să putem dispune de p mărimi independente, fie geometrice fie mecanice, care să satisfacă cele p relații suplimentare. Vom numi aceste p mărimi *parametrii sistemului articulat*. Alegerea parametrilor unui sistem articulat se face în raport cu specificul fiecărei probleme. Există deci probleme cu parametri geometrice, cu parametri mecanici, sau cu ambele categorii de parametri.

Numărul maxim de parametri geometrice ai unui sistem articulat exprimă *gradul său de libertate* sau de *mobilitate* și este egal cu p .

Datorită relațiilor (8.26) și (8.27), o condiție suficientă pentru ca un sistem articulat să fie un sistem mobil, este ca:

$$3n > b + r. \quad (8.32)$$

$$d) \quad p = 3n. \quad (8.33)$$

Sistemul de ecuații care satisface această relație nu posedă nici un parametru independent. Sistemul articulat corespunzător se numește sistem articulat nemobil.

Un sistem articulat mobil, cu p parametri, se poate transforma într-un sistem nemobil, prin introducerea a cel puțin p bare și legături exterioare simple. Numărul acestora este minim și este egal cu p , dacă prin aceasta se mărește p cu p unități, fără a se mări în același timp și numărul n al nodurilor.

Prin discutarea rezolvării unui sistem articulat cu ajutorul teoremei Kronecker-Capelli și pe baza celor arătate la punctele precedente, se ajunge la concluzia următoare:

Eforturile din barele unui sistem articulat dat, acționat de forțe efectiv aplicate oarecare, au valori unice și finite, numai dacă

$$b + r = p - 3n, \quad (8.34a)$$

sau în plan

$$b + r = p = 2n. \quad (8.34b)$$

Un astfel de sistem articulat se numește *sistem articulat static determinat și imobil*.

Un sistem articulat static determinat și nemobil se transformă într-un sistem mobil sau într-un sistem static nedeterminat prin suprimarea sau adăugarea în mod convenabil a unei bare oarecare sau a unei legături exterioare simple.

În practică se utilizează adeseori pentru recunoașterea sistemelor articulate static determinate și nemobile, relațiile mai simple

$$b + r = 3n, \quad (8.35a)$$

sau în plan

$$b + r = 2n, \quad (8.35b)$$

care reprezintă însă criterii necesare dar nu și suficiente pentru acest scop.

Aplicație. 5°. Se dă sistemul plan articulat din fig. 8.18 la care $I_{12} = I_{23}$. Forțele P_1, P_2, P_3 sînt aplicate în nodurile 1, 2, 3. Sistemul articulat nu este rezemat. Se cere să se examineze dacă eforturile din bare au valori finite și bine determinate.

Matricea coeficienților este

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

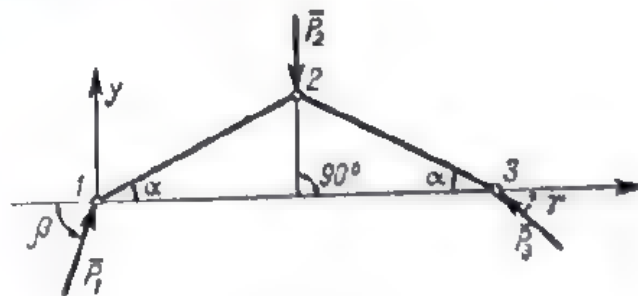


Fig. 8.18

Matricea sistemului este

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -P_1 \cos \beta \\ -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & P_2 \cos \gamma \\ \sin \alpha & 0 & -P_1 \sin \beta \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & P_2 \\ 0 & \sin \alpha & -P_2 \sin \gamma \end{vmatrix}$$

Presupunând că α este diferit de $\pi/2$ rangul matricii coeficienților este egal cu 2. Pentru ca sistemul de ecuații să fie compatibil, trebuie ca matricea sistemului să aibă același rang. Vom avea deci

$$\text{și } \begin{aligned} b=2, r=0, n=3, p=2 \\ p=b, p < 2n. \end{aligned}$$

Prin urmare sistemul dat este un sistem static determinat și mobil. Numărul parametrilor sistemului este $p=2n-p=4$.

Considerind ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$

relațiile suplimentare pentru determinarea acestor patru parametri se obțin anulând cei patru determinanți caracteristici. Dacă se alege mărimile P_1, P_2, β, γ ca parametri, rezultă

$$P_1 = P_2 = \frac{P_3}{2 \sin \alpha}, \quad \beta = \gamma = \alpha.$$

Menționăm că alegerea acestor mărimi ca parametri este echivalentă cu introducerea a două reazeme articulate plane în nodurile 1 și 3.

§ 10. Grinzi cu zăbrele static determinate. Generalități. Grinzile cu zăbrele sînt cele mai răspîndite sisteme articulate. Vom numi în general *grindă cu zăbrele* orice sistem articulat plan nemobil.

Grinda cu zăbrele fiind considerată ca un corp rigid, putem forma diferite sisteme de grinzi cu zăbrele. Rezolvarea acestor sisteme complexe nu prezintă nici o dificultate, problema putînd fi redusă la soluționarea în parte a echilibrului fiecărei grinzi componente.

Ca aplicație la subcapitolul sistemelor de corpuri, ne vom ocupa numai de grinzile cu zăbrele simple, static determinate, care satisfac relația

$$b=p=2n-r \quad (8.36)$$

stabilită anterior și unde b este numărul barelor, n numărul nodurilor, r numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor, iar p rangul comun al matricii sistemului și matricii coeficienților necunoscutele sistemului de ecuații corespunzător. Studiul detaliat al grinzilor cu zăbrele se face în statica construcțiilor.

Deoarece o grindă cu zăbrele poate fi considerată ca un corp rigid, numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor trebuie să fie egal cu trei, iar direcțiile acestor componente nu trebuie să fie nici paralele, nici concurente.

Există diferite metode analitice de calcul pentru eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele. Principale sînt însă trei: metoda calculului succesiv al eforturilor prin izolarea nodurilor, metoda secțiunilor și metoda înlocuirii barelor.

§ 11. Metoda izolării nodurilor. Metoda calculului succesiv al eforturilor prin izolarea nodurilor, numită curent în practică și „metoda izolării nodurilor”, a fost expusă principial în studiul anterior. Într-adevăr, s-a arătat că eforturile din bare pot fi calculate izolând fiecare nod al sistemului articular și arătând apoi că toate nodurile sînt în echilibru, separat, sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor din barele corespunzătoare.

În general, rezolvarea sistemului de ecuații de echilibru este anevoioasă. În anumite cazuri însă ea se face foarte ușor. Aceasta se întâmplă atunci cînd ecuațiile de echilibru ale nodurilor pot fi considerate

într-o astfel de succesiune, încît în fiecare etapă de rezolvare să obținem două ecuații cu cîte două necunoscute. Menționăm că reacțiunile se determină anterior acestor calcule, prin ecuațiile de echilibru ale întregii grinzi cu zăbrele.

De exemplu, la grinda cu zăbrele din fig. 8.19, după ce s-au determinat componentele necunoscute ale reacțiunilor, pentru a obține primele două ecuații care să conțină numai două necunoscute, este necesar să se înceapă calculul de la un nod unde se întîlnesc numai două bare și anume de la nodul 1 sau 9. Dacă sistemul nu ar avea nici un astfel de nod, nu am putea rezolva succesiv, două cîte două, ecuațiile de echilibru.

Pornind de la nodul 1, ecuațiile de echilibru sînt:

$$N_{12} \cos \alpha_1 + N_{13} + H_1 = 0, \quad N_{12} \sin \alpha_1 + V_1 = 0.$$

Sistemul de ecuații obținut este compatibil dacă determinantul coeficienților necunoscutelor este diferit de zero, adică dacă nodurile 1, 2, 3 nu sînt coliniare.

În continuare este necesar să trecem la un nod care să prezinte de asemenea numai două eforturi necunoscute, în cazul de față la nodul 2, unde necunoscutele sînt eforturile din barele 2-4 și 2-3. Ecuațiile de echilibru ale acestui nod sînt

$$\begin{aligned} -N_{21} \cos \alpha_1 + N_{23} \cos \alpha_2 + N_{24} \cos \alpha_3 + X_2 &= 0, \\ -N_{21} \sin \alpha_1 - N_{23} \sin \alpha_2 + N_{24} \sin \alpha_3 + Y_2 &= 0, \end{aligned}$$

unde $N_{21} = N_{12}$ este cunoscut din sistemul precedent de ecuații, iar X_2 și Y_2 sînt componentele forțelor aplicate nodului 2, de asemenea cunoscute. Aceste ecuații sînt compatibile dacă nodurile 2, 3, 4 nu sînt coliniare.

Procedîndu-se în felul acesta mai departe, se ajunge la nodul 7, unde întîlnim de asemenea două eforturi necunoscute: N_{78} și N_{79} . La nodul 8

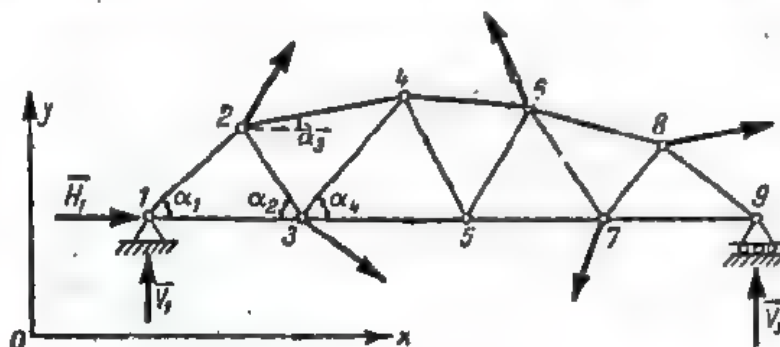


Fig. 8.19

dispunem de două ecuații, cu o singură necunoscută N_{89} , iar la nodul 9, tot de două ecuații de echilibru, însă cu nici un efort necunoscut. În felul acesta se obțin trei ecuații suplimentare. Aceasta se datorește faptului că, pentru a calcula cele trei componente necunoscute ale reacțiunilor, am utilizat deja trei ecuații de echilibru care sînt o consecință a sistemului de $b+r$ ecuații de echilibru ale nodurilor. Cele trei ecuații suplimentare vor fi deci satisfăcute identic de valorile eforturilor calculate anterior.

Există sisteme de bare articulate la care se poate aplica metoda izolării nodurilor fără să fie nevoie să se determine în prealabil reacțiunile, prin rezolvarea ecuațiilor de echilibru ale întregului sistem. În acest caz reacțiunile rezultă din rezolvarea ecuațiilor de echilibru ale nodurilor.

Există sisteme de bare articulate la care este neapărat necesar să se scrie în prealabil ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem, în scopul determinării reacțiunilor, deoarece sistemul de bare nu are nici un nod cu numai 2 necunoscute.

Există, în sfîrșit, sisteme static determinate, la care metoda izolării nodurilor nu se poate aplica nici după ce s-au scris în prealabil ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem.

De exemplu, la sistemul din fig. 8.23, nu putem găsi nici un nod în care să se întâlnească numai două bare și care să ne dea posibilitatea să formăm primele două ecuații cu două necunoscute. De asemenea la sistemul din fig. 8.22, putem calcula prin această metodă numai eforturile din barele trasate cu linii mai pline, și anume pornind de la nodurile 1 și 15. Pentru a afla însă eforturile din celelalte bare, metoda devine inutilizabilă.

Aplicații. 6°. Se dă grinda cu zăbrele din fig. 8.20 acționată de forțe verticale în nodurile 2 și 4. Se cere să se calculeze eforturile din bare.

Cele trei ecuații de echilibru ale forțelor exterioare, determină reacțiunile

$$H_1=0, V_1=1,5 P, V_3=0,5 P.$$

Ecuațiile de echilibru ale nodurilor vor fi:

Pentru nodul 1:

$$N_{12} \cos 30^\circ + N_{13} = 0, N_{12} \sin 30^\circ + V_1 = 0;$$

rezultă

$$N_{12} = -3P, N_{13} = \frac{3\sqrt{3}}{2}P.$$

Pentru nodul 2:

$$-N_{21} \cos 30^\circ + N_{23} \cos 30^\circ + N_{24} \cos 30^\circ = 0,$$

$$-N_{21} \sin 30^\circ - N_{23} \sin 30^\circ + N_{24} \sin 30^\circ - P = 0;$$

rezultă

$$N_{23} = P, N_{24} = 2P.$$

Pentru nodul 3:

$$-N_{31} - N_{32} \cos 30^\circ + N_{34} \cos 60^\circ - N_{35} = 0, N_{32} \sin 30^\circ + N_{34} \sin 60^\circ = 0;$$

rezultă

$$N_{34} = \frac{\sqrt{3}}{3}P, N_{35} = \frac{8\sqrt{3}}{6}P.$$

Procedînd în acest fel pentru celelalte noduri, găsim

$$\begin{aligned} N_{45} &= -\frac{\sqrt{3}}{3}P, & N_{46} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}P, \\ N_{56} &= \frac{\sqrt{3}}{3}P, & N_{67} &= \frac{\sqrt{3}}{3}P, \\ N_{67} &= 0, & N_{68} &= -P, \\ N_{78} &= 0, & N_{79} &= \frac{\sqrt{3}}{3}P, \\ N_{89} &= -P. \end{aligned}$$

Se observă că eforturile din barele 7-8 și 6-7 sînt nule. Acest rezultat, s-ar fi putut deduce de la început. Într-adevăr, considerînd echilibrul nodului 8, rezultă că, deoarece barele 6-8 și 8-9 sînt în prelungire, componenta efortului N_{78} perpendiculară pe aceste bare nu poate fi echilibrată de nici o forță. Este necesar deci ca efortul N_{78} să fie nul. În mod analog se poate deduce și egalitatea cu zero a efortului N_{67} .

7°. Se dă sistemul spațial articulată din fig. 8.21 acționat de forța P și rezemat articulată în nodurile 1, 2, 3, 4.

Aplicînd relația (8.13 a) rezultă

$$b=12, \quad r=12, \quad n=8,$$

deci

$$12+12=3 \times 8.$$

Eforturile în bare se vor determina prin metoda izolării nodurilor.

— Nodul 6: trei ecuații de echilibru obținute prin proiecțiile eforturilor pe axe paralele cu 5-6, 6-7, 6-2, arată că

$$N_{65}=N_{67}=N_{62}=0.$$

— Nodul 5: ecuațiile de proiecție pe axe paralele cu barele 5-6, 5-8, 5-2, dau

$$N_{57}=N_{51}=N_{53}=0.$$

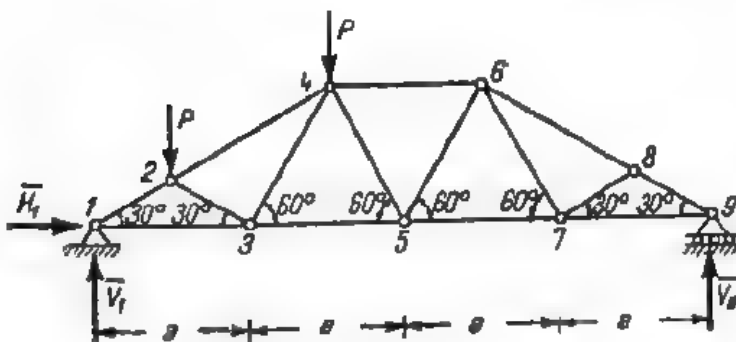


Fig. 8.20

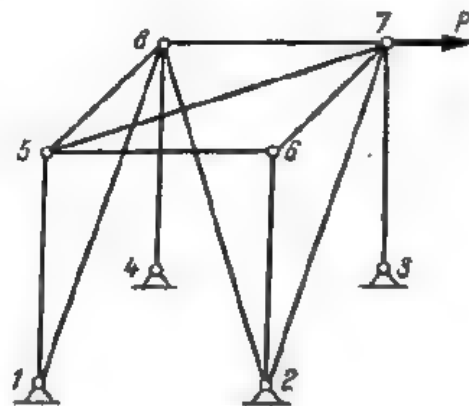


Fig. 8.21

— Nodul 7: din ecuația de proiecție pe o axă paralelă cu bara 7-8, rezultă

$$N_{78}=P.$$

Alte două ecuații de proiecție, pe o axă paralelă cu 6-7 și respectiv 7-3, dau

$$N_{73}=N_{76}=0.$$

— Nodul 8: din ecuațiile de proiecție pe axe paralele respectiv cu barele 7-8, 8-3 și 8-1, rezultă

$$N_{83}=-1,596 P, \quad N_{81}=1,320 P, \quad N_{84}=-0,053 P.$$

§ 12. Metoda secțiunilor (Ritter). Se bazează pe teorema echilibrului părților. Secționând grinda cu zăbrele în două părți, fiecare dintre aceste două părți trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare aferente și a eforturilor din barele secționate. Observăm că, dacă o parte ar conține numai un singur nod, atunci s-ar reveni la metoda izolării nodurilor, descrisă la paragraful precedent.

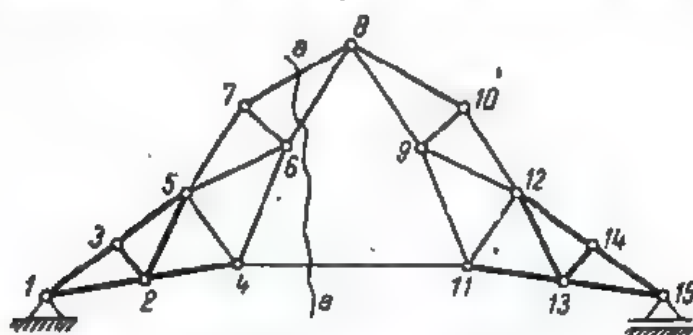


Fig. 8.22

Metoda secțiunilor prezintă interes atunci când cele trei ecuații de echilibru ale unei părți secționate conțin trei necunoscute. Aceasta este posibil, dacă secțiunea efectuată întâlnește trei bare. Cele trei necunoscute au valori finite și unice, dacă direcțiile celor trei bare secționate nu sînt nici concurente, nici paralele.

Ecuațiile de echilibru ale unei porțiuni secționate pot fi formate astfel, încît să obținem cîte o singură necunoscută în fiecare ecuație, ceea ce spre deosebire de metoda precedentă, ne dă posibilitatea de a calcula eforturile dintr-o bară, fără a fi nevoie să cunoaștem eforturile din alte bare. Această particularitate a metodei o face să fie utilizată adesea în statica construcțiilor.

Metoda secțiunilor se mai folosește în unele cazuri, în combinație cu metoda izolării nodurilor. De exemplu, s-a arătat mai înainte că la ferma din fig. 8.22 nu este posibilă calcularea eforturilor prin metoda izolării

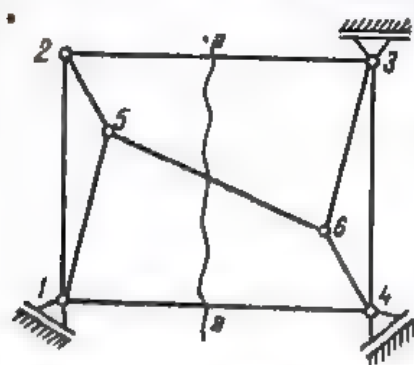


Fig. 8.23

nodurilor, decît pentru barele trasate cu linii mai pline. Pentru a utiliza totuși și mai departe metoda izolării nodurilor, este necesar să facem o secțiune după linia $a-a$. O dată determinate prin metoda secțiunilor eforturile din barele secționate, putem aplica mai departe metoda izolării nodurilor fără a mai întâmpina vreo dificultate.

De asemenea, pentru a putea utiliza metoda izolării nodurilor la sistemul plan articulat din fig. 8.23 este necesar mai întîi să aplicăm o singură dată metoda secțiunilor, efectuînd, de exemplu secțiunea $a-a$.

Aplicație. 8°. Să aplicăm metoda secțiunilor pentru grinda cu zăbrele din fig. 8.24.

Pentru calcularea efortului N_{24} , este necesar să efectuăm o secțiune care să întâlnească trei bare neconcurente, printre care și bara 2-4. Fie $b-b$ această secțiune. Se obține o ecuație care conține ca necunoscută numai efortul N_{24} , dacă se scrie o ecuație de momente în raport cu punctul de intersecție al celorlalte două bare secționate, adică în raport cu nodul 3.

În principiu este indiferent dacă formăm ecuațiile de echilibru pentru porțiunea din stînga sau pentru cea din dreapta. Ecuația de echilibru respectivă pentru porțiunea din stînga este:

$$-N_{24}h_2 + M_2 = 0,$$

unde am notat cu h_2 distanța de la nodul 3 la bara 2-4 și cu M_2 , momentul forțelor exterioare (inclusiv reacțiunile) aplicate pe porțiunea din stînga, în raport cu punctul 3.

În cazul de față

$$V_1 = 1,5 P, \quad M_2 = -V_1 a + P \frac{a}{2} =$$

$$= -Pa, \quad h_2 = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Înlocuind în prima ecuație, găsim

$$N_{24} = -2P.$$

Pentru a calcula efortul N_{56} , efectuăm secțiunea $c-c$. Celelalte bare secționate, 4-6 și 5-7 sînt paralele, astfel că o ecuație de proiecție pe direcția perpendiculară acestora nu va conține eforturile N_{46} și N_{57} . O astfel de ecuație de echilibru corespunzătoare porțiunii din stînga este

$$T_5 + N_{56} \cos 30^\circ = 0,$$

unde T_5 este forța tăietoare obținută însumînd forțele exterioare aplicate pe această parte a grinzii. În cazul de față

$$T_5 = V_1 - 2P = -\frac{P}{2}.$$

Rezolvînd ecuația de echilibru, găsim

$$N_{56} = P \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

§ 13. Metoda înlocuirii barelor. S-a spus mai înainte că există grinzi cu zăbrele la care nu se pot aplica cele două metode descrise anterior. Este vorba de acele grinzi care nu posedă nici un nod în care să se întîlnească numai două bare și la care nu se poate efectua nici o secțiune care să întîlnească trei bare necunoscute și neparalele. În aceste cazuri se aplică metoda înlocuirii barelor, care ne dă posibilitatea de a rezolva orice grindă cu zăbrele static determinată.

Să presupunem că într-o grindă cu zăbrele nerezolvabilă cu ajutorul primelor două metode, suprimăm p bare și le înlocuim prin alte bare, astfel ca sistemul nou creat să fie rezolvabil prin aceste două metode. Cele p bare noi pot lega două noduri între ele, sau pot lega un nod al sistemului cu un punct fix oarecare. Trebuie numai să avem grijă ca noua grindă cu zăbrele transformată să fie nemobilă și static determinată.

Vom nota cu $N_0^{(1)}, N_0^{(2)}, \dots$ eforturile din sistemul transformat, produse de forțele exterioare date și care pot fi determinate prin metoda izolării nodurilor sau prin metoda secțiunilor.

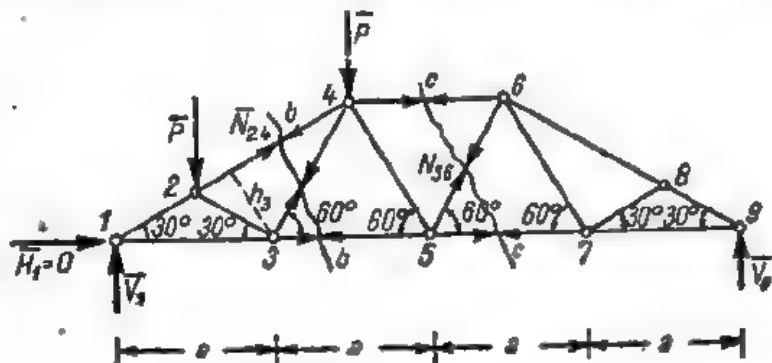


Fig. 8.24

Sistemul inițial, la care cele p bare sînt, suprimate, va fi deci în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare date și a forțelor X_1, X_2, \dots, X_p determinate din sistemul de ecuații (8.38). Restabilind acum configurația sistemului inițial prin introducerea la loc a barelor suprimate, forțele X vor însemna tocmai eforturile din aceste bare.

În general, la sistemele articulate plane este suficient să înlocuim una sau două bare, pentru a le putea rezolva.

Aplicație. 9°. În grinda cu zăbrele¹ din fig. 8.25 este suficient să înlocuim o singură bară, pentru a putea calcula eforturile din bare. În cazul de față, bara 3-6 a fost înlocuită prin bara 1-5. Notăm cu X_1 efortul din bara 3-6 din sistemul inițial.

Elementele geometrice ale sistemului sînt suficient determinate, pentru calculul nostru, dacă cunoaștem unghiurile α și β . Presupunem că $\sin \alpha = 0,6$ și $\sin \beta = 0,8$.

În tabela 7, au fost înscrise în coloanele 2 și 3 eforturile din bare, produse de încărcarea dată P și de încărcarea $X_1 = 1$, în sistemul modificat.

Tabela 7

Bara	Eforturi N_0 din sarcina P	Eforturi N_1 din încărcarea $X_1 = 1$	$N_1 \cdot X_1$	Eforturi definitive $N = N_0 + N_1 \cdot X_1$
2-3, 3-4	0	$-\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14}P$	$+\frac{15}{14}P$
1-2, 4-5	0	-1	$+\frac{9}{7}P$	$+\frac{9}{7}P$
2-5, 4-1	0	$+\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14}P$	$-\frac{15}{14}P$
1-6, 5-6	$+\frac{5}{8}P$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{45}{56}P$	$+\frac{10}{7}P$
1-5	$-\frac{3}{8}P$	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{3}{8}P$	0

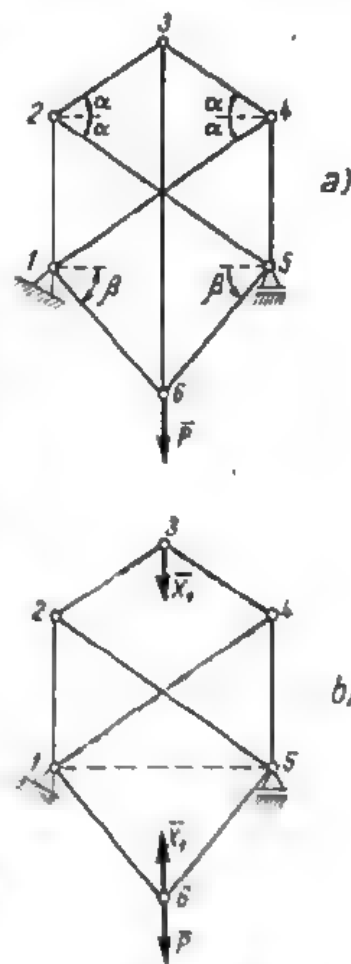


Fig. 8.25

Sistemul de ecuații (8.38) se reduce la

$$N_0^{(1)} + N_1^{(1)} \cdot X_1 = 0,$$

unde $N_0^{(1)}$ este efortul din bara introdusă, produs de încărcarea dată, iar $N_1^{(1)}$ este efortul din aceeași bară, produs de încărcarea $X_1 = 1$. Înlocuind prin valorile numerice calculate

$$X_1 = -\frac{N_0^{(1)}}{N_1^{(1)}} = -\frac{3P \cdot 24}{8 \cdot 7} = -\frac{9}{7}P.$$

Ultimele două coloane servesc la calcularea eforturilor definitive, conform relațiilor (8.38) care în cazul acesta devin

$$N = N_0 + N_1 \cdot X_1.$$

¹ După A. В. Дарков, В. И. Кузнецов, Строительная Механика, Транспортно-железнодорожный, Москва, 1956, стр. 34-35.

§ 14. Poligon articulată. Numim *poligon articulată* un sistem de bare articulate între ele, sistem care are forma unui poligon deschis.

Poligoanele articulate cu mai mult de două bare sînt sisteme mobile.

Prin urmare se pune problema de a determina forma de echilibru a poligonului, precum și eforturile din bare.

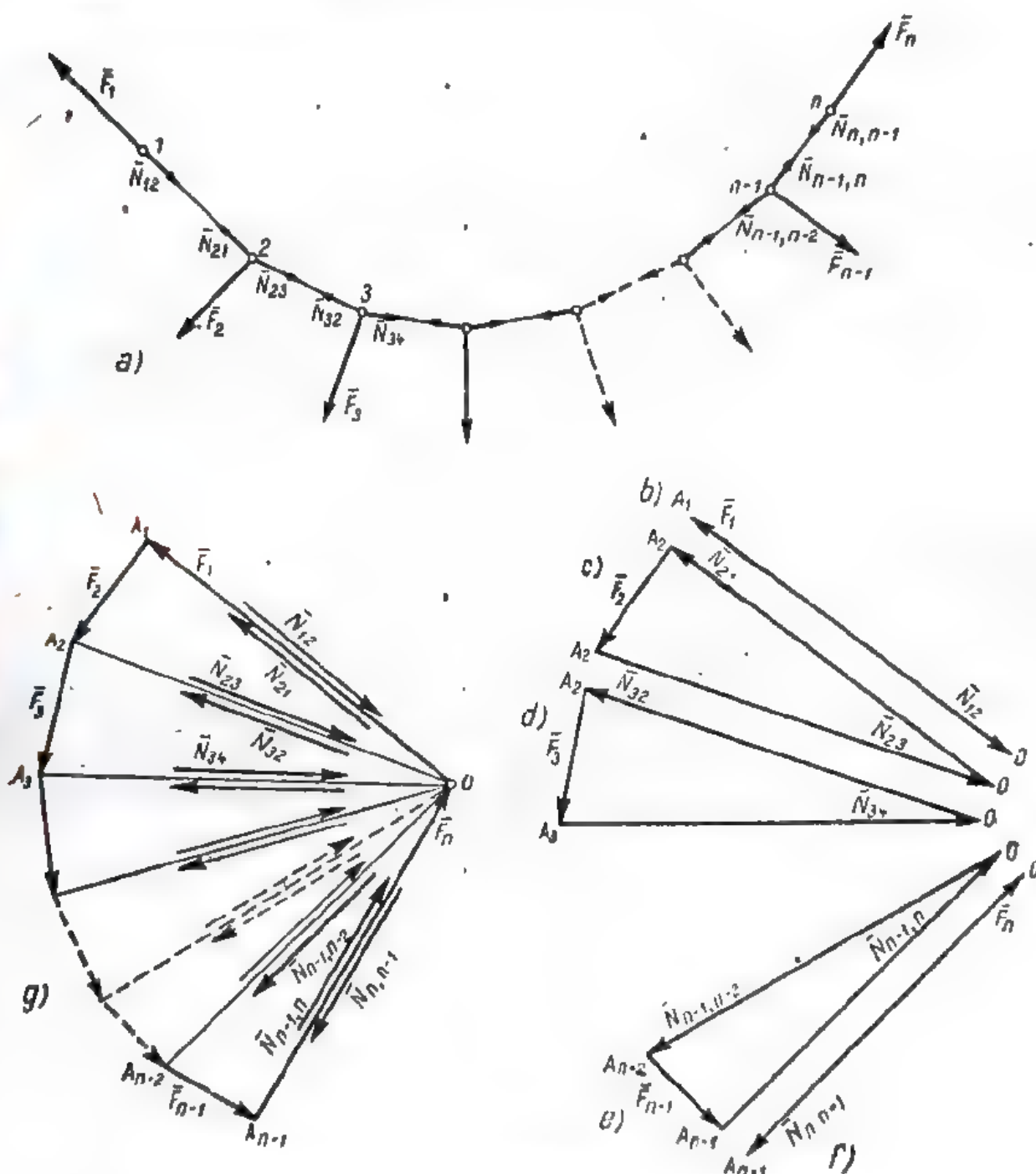


Fig. 8.26

Fie un poligon articulată în ale cărui noduri 1, 2, ..., n acționează un sistem de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ echivalent cu zero (fig. 8.26). În bare se

vor dezvolta eforturile $\bar{N}_{12} = -\bar{N}_{21}$, $\bar{N}_{23} = -\bar{N}_{32}$, pe care le considerăm că se aplică asupra nodurilor respective.

Condiția necesară și suficientă de echilibru a acestui sistem articulat, ca fiecare nod să fie în echilibru sub acțiunea forțelor date și a forțelor de legătură care îl acționează, se poate reprezenta grafic prin câte un poligon al forțelor, închis.

Pentru nodurile extreme, relațiile de echilibru

$$\bar{F}_1 + \bar{N}_{12} = 0, \quad \bar{F}_n + \bar{N}_{n,n-1} = 0$$

ne arată că poligoanele respective se reduc la două forțe egale și de sens contrar. În fig. 8.26, *b* s-a reprezentat grafic echilibrul nodului 1.

În fig. 8.26, *c, d, e, f* s-au construit poligoane de forțe pentru nodurile 2 și 3; $n-1, n$. Se constată că aceste poligoane se pot suprapune grafic de-a lungul laturilor lor comune OA_1, OA_2, OA_3 etc., deoarece aceste laturi au aceeași direcție și aceeași mărime, la scara grafică a desenului. Această suprapunere s-a executat în fig. 8.26, *g*. Se obține în acest fel poligonul forțelor date $OA_1 \dots A_{n-1}O$, care este un poligon închis și parcurs în același sens de aceste forțe, deoarece rezultanta forțelor care acționează sistemul articulat trebuie să fie nulă, eforturile $\bar{N}_{12}, \bar{N}_{21}, \bar{N}_{23}, \bar{N}_{32}$ etc. anulându-se reciproc.

Laturile OA_1, OA_2, OA_3 etc. se numesc *raze polare*, iar punctul O de concurență al lor, se numește *pol*. Figura geometrică formată de laturile poligonului articulat, paralele cu razele polare, se numește *poligon funicular*. În cazurile când laturile poligonului funicular devin foarte mici, tinzând către zero, iar forțele aplicate la noduri tind către forțe repartizate, poligonul funicular ia forma unei curbe denumită *curbă funiculară*.

Construcția poligonului funicular, și deci determinarea eforturilor din bare și a poziției lor, se execută astfel: întâi se construiește poligonul închis al forțelor date (fig. 8.26, *g*) polul O fiind situat la intersecția liniilor de acțiune a forțelor extreme \bar{F}_1 și \bar{F}_n și se construiesc celelalte raze polare OA_1, \dots, OA_{n-1} . Dintr-un punct oarecare I , se trasează latura 1-2 paralelă cu OA_1 și avînd lungimea dată a barei, apoi latura 2-3 paralelă cu OA_2 etc. Eforturile din bare sînt date de segmentele OA_1, OA_2 etc., măsurate la scara grafică la care a fost construit poligonul de forțe.

În legătură cu problema poligoanelor articulate, putem face următoarele observații:

a) Deoarece forța exterioară care acționează la un nod formează cu eforturile din barele alăturate, un triunghi, urmează că această forță și cele două bare alăturate sînt situate în același plan.

b) Ca o consecință a observației precedente deducem că un poligon articulat acționat de forțe exterioare paralele cu un plan este el însuși paralel cu acel plan.

c) Dacă eforturile din bare sînt toate eforturi de întindere, poligonul articulat poate fi înlocuit cu un fir perfect flexibil și neextensibil, de greutate neglijabilă.

Construcția grafică a poligonului funicular pentru un sistem oarecare de forțe date este extrem de utilă în multe probleme ale staticii și ea va fi examinată amănunțit mai departe (cap. X, § 4).

În general, este mai dificilă rezolvarea analitică a unui poligon articulată, în cazul general. De cele mai multe ori se recurge la metode grafice. Există unele cazuri însă când calculul analitic nu prezintă dificultăți, unul dintre acestea este poligonul articulată suspendat la ambele extremități și acționat de forțe paralele, egale, echidistante și de același sens. Aceste

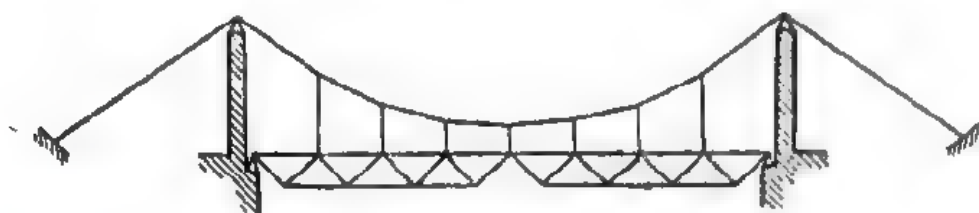


Fig. 8.27

sisteme se întâlnesc în practică la unele poduri suspendate (fig. 8.27), forțele exterioare provenind din acțiunea gravitației asupra construcției susținute de poligonul articulată.

Fie în acest caz poligonul articulată $1, 2, \dots, n$, acționat de forțele verticale F_1, F_2, \dots, F_n . Considerăm un sistem de axe ortogonale Oxy în planul poligonului, axa Oy fiind paralelă și de sens contrar forțelor. Notăm cu $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{n-1,n}$, unghiurile formate cu axa Ox , de barele parcurse în sensul crescător al numerotației nodurilor și presupunem, fără a se restrânge prin aceasta generalitatea problemei, că punctul 1 coincide cu originea axelor de coordonate. În fig. 8.28 au fost reprezentate numai nodurile $i-1, i$ și $i+1$.

Formind ecuațiile de echilibru pentru fiecare nod, obținem proiectând pe axa Ox

$$N_{i,i-1} \cos \alpha_{i-1,i} = N_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} = \text{const} = H, \quad (8.39)$$

unde constanta H este proiecția pe Ox a eforturilor din bare.

Din ecuațiile de proiecție pe Oy găsim pentru nodul i , după ce am înlocuit pe N din (8.39)

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_{i,i+1} - \text{tg } \alpha_{i-1,i} &= \\ &= \frac{F_i}{H} = \frac{F}{H} = \text{const} = k, \end{aligned} \quad (8.40)$$

unde am notat cu F valoarea comună a forțelor F_i .

Însumând relațiile precedente, scrise pentru fiecare nod,

de la 2 la $i-1$, obținem valoarea unghiului $\alpha_{i-1,i}$ în funcție de constanta k și unghiul $\alpha_{1,2}$

$$\text{tg } \alpha_{i-1,i} = \text{tg } \alpha_{1,2} + k(i-2). \quad (8.41)$$

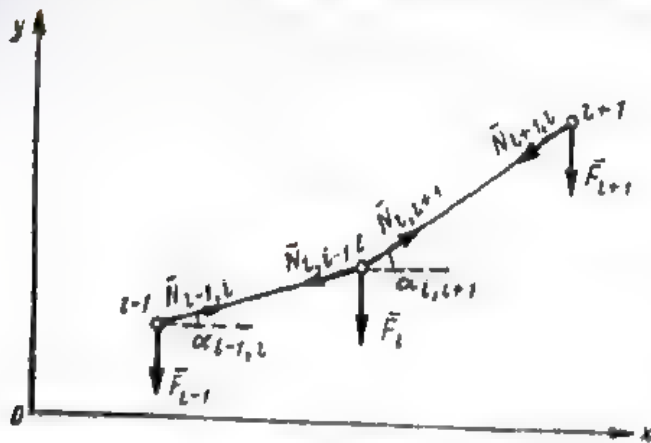


Fig. 8.28

Coordonatele nodului i sînt

$$x_i = (i-1)a, \quad y_i = a(\operatorname{tg} \alpha_{1,2} + \operatorname{tg} \alpha_{2,3} + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{i-1,i}). \quad (8.42)$$

Înlocuind valorile pentru $\operatorname{tg} \alpha$ din relația (8.41) în expresia y_i găsim

$$y_i = a[(i-1)\operatorname{tg} \alpha_{1,2} + k + 2k + \dots + (i-2)k] = a\left[(i-1)\operatorname{tg} \alpha_{1,2} + \frac{(i-1)(i-2)}{2}k\right].$$

Eliminăm pe i între ultima relație și (8.42); obținem

$$y_i = x_i \operatorname{tg} \alpha_{1,2} + \frac{k}{2} x_i \left(\frac{x_i}{a} - 1\right).$$

Ultima relație ne arată că poligonul articulat este înscris într-o parabolă de ecuație

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_{1,2} + \frac{k}{2} x \left(\frac{x}{a} - 1\right). \quad (8.43)$$

Determinarea celor doi parametri k și $\operatorname{tg} \alpha_{1,2}$ nu prezintă dificultăți, dacă se cunoaște punctul n unde este suspendat celălalt capăt al poligonului.

IX. FIRE

§ 1. Definiții. Ipoteze de calcul. În mecanica rațională prin fir se înțelege un corp la care, din punct de vedere geometric, două dimensiuni sînt neglijabile; firele sînt considerate perfect flexibile și torsionabile, ele neputînd prelua eforturi de încovoiere și de torsiune.

O caracteristică a firelor, în studiul care urmează, comună, de altfel tuturor corpurilor studiate de mecanica rațională, este inextensibilitatea lor. Este necesar să precizăm că firele fiind materializate prin cabluri, lanțuri, odgoane etc., în realitate nu există fire perfect flexibile și inextensibile. Astfel firele nu sînt absolut inextensibile, ci se lungesc sub acțiunea unor solicitări de întindere și chiar se rup, dacă aceste solicitări sînt prea mari. În



Fig. 9.1

fotografia din fig. 9.1 se arată un exemplu de fir care, fiind acționat de o încărcare foarte mare de chiciură și, simultan, de presiunea vântului, s-a rupt, avariind și stîlpul din beton armat.

În majoritatea aplicațiilor tehnice, este suficient să considerăm firele ca perfect flexibile și inextensibile. Totuși, există unele cazuri pentru care această schemă de calcul nu dă rezultate mulțumitoare, de exemplu extensibilitatea firelor se ia în considerație la funiculare cu deschideri mari, poduri suspendate și static nedeterminate etc., iar rigiditatea firelor are influență în special în calculul sistemelor de scripeți și a unor transmisii de mișcări prin cabluri, lanțuri și curele.

Studiul static al firelor urmărește determinarea formelor de echilibru, precum și a eforturilor interioare ale firelor supuse acțiunii unor forțe exterioare oarecare.

§ 2. Fir acționat de forțe repartizate. Vom considera mai întâi cazul cînd firul este acționat numai de forțe repartizate. Forma de echilibru a unui astfel de fir se numește *curbă funiculară*.

Ecuatiile generale de echilibru ale firelor se pot deduce pornind de la ecuațiile (8.14) și (8.15) stabilite la bară. Grosimea firului fiind neglijabilă, firul poate fi înlocuit prin axa lui, punctele de aplicație ale forțelor exterioare, cît și ale eforturilor interioare într-o secțiune, fiind în consecință situate pe această axă. Urmează că termenii din ecuațiile (8.14) și (8.15) care exprimă momentele forțelor exterioare și ale eforturilor din secțiune în raport cu diferitele puncte ale axei, sînt nule. Va rămîne

$$\frac{dR(s)}{ds} + \bar{p}(s) = 0, \quad \bar{\tau}(s) \times \bar{R}(s) = 0, \quad (9.1)$$

unde $\bar{R}(s)$ este rezultanta eforturilor interioare, aplicată în secțiunea s și anume pe fața secțiunii întîlnită în față, atunci cînd parcurgem firul într-un sens ales pozitiv (s fiind lungimea arcului de curbă, măsurat de la un punct definit ca origine, în care $s=0$), $\bar{p}(s)$ este forța exterioară raportată la unitatea de lungime a firului, forță care acționează în dreptul secțiunii s , iar $\bar{\tau}(s)$ este versorul tangent la fir, în dreptul aceleiași secțiuni.

Relația a doua ne arată că vectorul $\bar{R}(s)$ este tangent la fir. Este deci potrivit a se înlocui notația \bar{R} cu \bar{N} . Ecuatiile vectoriale ale curbei funiculare a firului vor fi prin urmare

$$\frac{d\bar{N}(s)}{ds} + \bar{p}(s) = 0. \quad (9.2)$$

Conform convenției enunțate în paragraful anterior, putem pune

$$N(s) = N(s) \cdot \bar{\tau}(s), \quad (9.3)$$

unde $N(s)$ este o mărime scalară, reprezentînd tensiunea din fir în secțiunea situată la distanța s de punctul definit ca origine. $N(s)$ nu poate avea decît valori pozitive în cazul firelor, deoarece într-un fir nu pot exista decît eforturi de întindere.

Derivând partea din dreapta a relației (9.3) în raport cu s și înlocuind în (9.2), obținem

$$\frac{dN}{ds} \bar{\tau} + \frac{N}{\rho} \bar{\nu} + \bar{p} = 0, \quad (9.4)$$

unde $\bar{\nu}$ este versorul normalei principale la curbă, iar ρ este raza de curbură.

Prin multiplicarea scalară cu versorii tangentei, normalei principale și binormalei, se obțin ecuațiile intrinseci de echilibru ale firelor

$$\frac{dN}{ds} + p_\tau = 0, \quad (9.5)$$

$$\frac{N}{\rho} + p_\nu = 0, \quad (9.6)$$

$$p_\beta = 0, \quad (9.7)$$

p_τ , p_ν și p_β fiind proiecțiile lui \bar{p} pe axele triedrului intrinsec.

Aceste ecuații ne permit să facem unele observații interesante asupra formei de echilibru a firelor acționate de forțe repartizate. Astfel:

a) ecuația (9.7) ne arată că în dreptul fiecărui punct al curbei funiculare, forța repartizată \bar{p} trebuie să fie conținută în planul osculator corespunzător;

b) dacă \bar{p} are o direcție constantă, planul osculator este paralel cu această direcție. Însă, așa cum se știe din geometria diferențială dacă în toate punctele unei curbe planul osculator este permanent paralel cu o direcție fixă, curba este situată într-un plan fix paralel cu această direcție;

c) ecuația (9.6) ne arată că forța repartizată \bar{p} este îndreptată întotdeauna înspre partea convexă a curbei funiculare și anume, în sensul tensiunilor descrescătoare (9.5);

d) dacă toate forțele repartizate \bar{p} au același suport, curba funiculară ia forma unei linii drepte care coincide cu acest suport comun;

e) componenta tangențială a forței repartizate \bar{p} are ca efect modificarea tensiunii, iar dacă tensiunea este cunoscută, componenta normală determină curbura;

f) dacă \bar{p} este în mod constant normal la fir, $p_\tau = 0$, iar tensiunea este constantă în modul. Această observație este valabilă și în cazul unui fir de greutate neglijabilă, întins pe o suprafață netedă. Tensiunea introdusă la un capăt al firului este condusă cu aceeași valoare, la capătul celălalt. Reacțiunea suprafeței este tocmai componenta p_ν din ecuația (9.6), prin urmare, normala la suprafață este conținută în planul osculator al curbei. Urmează că figura de echilibru a unui astfel de fir este o linie geodezică a suprafeței. Reacțiunea suprafeței are valoarea absolută $p_\nu = \frac{N}{\rho}$, unde N este tensiunea constantă din fir: $N(0) = N(s) = N(l)$, l fiind lungimea totală a firului;

g) presupunând că forța repartizată \bar{p} derivă dintr-o funcție de forțe $U(x, y, z)$, vom avea

$$\bar{p} = \text{grad } U,$$

Proiectînd această relație vectorială pe direcția $\bar{\tau}$ obținem

$$p_t = \frac{dU}{ds}.$$

Ecuația (9.5) se poate scrie în acest caz

$$\frac{dN}{ds} + \frac{dU}{ds} = \frac{d}{ds} (N + U) = 0,$$

sau

$$N + U = \text{const.}$$

Prin urmare tensiunea din fir diferă numai printr-o constantă de funcția de forță U cu semn schimbat. Dacă U este o funcție uniformă de x, y, z , tensiunea N are aceeași valoare în toate punctele firului, care sînt situate pe aceeași suprafață de nivel.

De exemplu, în cazul firelor acționate numai de greutatea proprie constantă p , considerînd axa Oy verticală ascendentă, avem

$$U = -py + \text{const, iar } N = py + \text{const.}$$

Printr-o alegere convenabilă a poziției axelor se poate obține anularea constantei, astfel că rezultă

$$N = py, \quad (9.9)$$

formulă care va fi obținută mai departe prin calcul direct.

Pentru aplicațiile practice este mai comod, de multe ori, să recurgem la un sistem fix de axe de coordonate rectangulare. Proiectînd ecuația de echilibru (9.2) pe aceste axe și utilizînd și relația (9.3), se obține

$$\frac{d\left(N\frac{dx}{ds}\right)}{ds} + p_x = 0, \quad \frac{d\left(N\frac{dy}{ds}\right)}{ds} + p_y = 0, \quad \frac{d\left(N\frac{dz}{ds}\right)}{ds} + p_z = 0, \quad (9.10)$$

unde am notat cu p_x, p_y, p_z , proiecțiile forței repartizate \bar{p} pe axele Ox, Oy, Oz .

În afară de aceasta mai dispunem de ecuația

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \quad (9.11)$$

Cu ajutorul acestor patru ecuații diferențiale se pot determina necunoscutele x, y, z și N , în funcție de s . Ecuațiile (9.10) și (9.11) sînt de ordinul întâi în raport cu N , însă de ordinul al doilea în raport cu x, y, z . Vom dispune deci în integralele generale de șase constante arbitrare, care se vor determina prin condiții la limită.

Cea mai simplă problemă este aceea a unui fir de lungime dată l , suspendat la cele două extremități $A(x_1, y_1, z_1)$ și $B(x_2, y_2, z_2)$. Considerînd originea arcelor de curbă în A și scriind că pentru $s=0$ și $s=l$, x, y, z iau valori corespunzătoare punctelor A și B , se obțin șase ecuații pentru

determinarea acestor șase constante. () discuție a acestui sistem de ecuații ne indică dacă problema admite soluții și dacă aceste soluții sînt sau nu determinate și finite.

§ 3. Fir suspendat la extremități, acționat de o forță repartizată, de direcție constantă și proporțională cu lungimea elementului de fir. Lănțisorul. Aplicațiile cele mai des întâlnite în practică, se referă la firele acționate numai de forțe repartizate, paralele cu o direcție fixă. În această categorie intră firele acționate de greutatea proprie. Conform observației b, firul va fi situat într-un același plan. Alegem sistemul de axe, astfel încît axa Oy să fie paralelă și de sens invers forței repartizate, iar Ox perpendiculară pe Oy , firul fiind situat în planul xOy (fig. 9.2). Notînd cu p sarcina repartizată a firului, ecuațiile (9.10) se transformă în

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(N \frac{dy}{ds} \right) = -p. \quad (9.12)$$

Prima ecuație se integrează ușor:

$$N \frac{dx}{ds} = H. \quad (9.13)$$

Semnificația constantei H este foarte importantă dacă observăm că proiecția $N \frac{dx}{ds}$ a tensiunii N pe axa Ox este constantă în orice punct al curbei funiculare a unui fir acționat de sarcini repartizate paralele cu Oy și este egală cu H .

Prin urmare tensiunea într-o secțiune în care tangenta la fir este paralelă cu Ox va fi egală tocmai cu această constantă H .

Eliminînd tensiunea N între a doua ecuație (9.12) și ecuația (9.13) se găsește

$$H \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = -p. \quad (9.14)$$

Înlocuind $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$, se obține

$$d(y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{a} dx, \quad (9.15)$$

unde am notat

$$a = \frac{H}{p}. \quad (9.16)$$

Integrala acestei ecuații este

$$y' = \text{sh} \frac{x-x_0}{a} \quad (9.17)$$

x_0 fiind o constantă de integrare.

Integrînd încă o dată ecuația (9.17) se obține ecuația curbei funiculare a firului, cunoscută sub numele de „lănțisor“, a fiind parametrul lăntisorului

$$y - y_0 = a \text{ ch} \frac{x - x_0}{a} \quad (9.18)$$

iar y_0 o nouă constantă de integrare.
Din relația (9.13) se deduce valoarea tensiunii

$$N = H \frac{ds}{dx} = H \sqrt{1+y'^2} = H \sqrt{1 + \text{sh}^2 \frac{x-x_0}{a}} \quad (9.19)$$

$$N = H \text{ ch} \frac{x-x_0}{a}.$$

Transportând paralel axele de coordonate în punctul de coordonate x_0, y_0 și păstrând aceeași notație Oxy pentru noile axe, relațiile (9.17), (9.18), (9.19) devin

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad (9.20)$$

$$N = H \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad (9.21)$$

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (9.22)$$

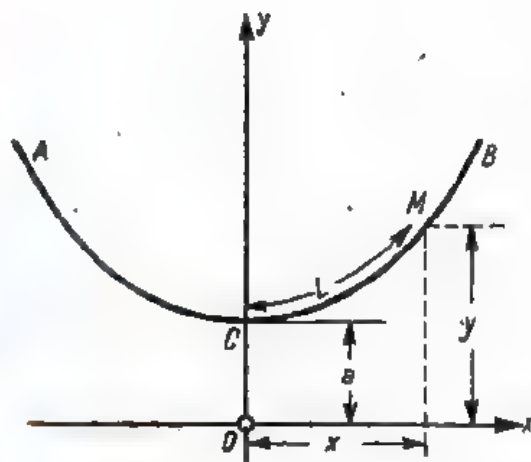


Fig. 9.2

Curba funiculară are în acest caz un punct de minim în $O(0, a)$ și este simetrică în raport cu noua axă Oy (fig. 9.2).

Lungimea curbei între abscisele 0 și x se obține înlocuind în (9.15) pe $\sqrt{1+y'^2}$ din $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$

$$L = \int_0^x ds = a \int_0^x dy' = ay'.$$

Ținând seama de (9.20) avem

$$L = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \quad (9.23)$$

Ridicând la pătrat relația precedentă și folosind (9.22) găsim o relație între lungimea arcului CM , ordonata y a punctului M și parametrul a

$$L^2 + a^2 = y^2. \quad (9.24)$$

Dacă eliminăm $\operatorname{ch} \frac{x}{a}$ din (9.21) și (9.22) se obține relația

$$N = py, \quad (9.25)$$

care a fost stabilită cu ocazia observației făcute asupra firului acționat de o forță repartizată care derivă dintr-o funcție de forță. Tensiunea în fir variază deci proporțional cu ordonata și anume, este egală cu greutatea unei porțiuni de fir cuprinsă între punctul considerat și axa Ox . În consecință, un fir omogen supus numai la acțiunea greutății sale proprii, este în echilibru dacă cele două extremități ale lui sînt petrecute pe după doi scripeți foarte mici, astfel încît cele două capete să atîrne pînă la axa Ox .

Lănțiorul mai poate fi definit prin „ecuația naturală” a lui, obținută din integrarea directă a relației (9.14) și înlocuirea derivatei y' cu $\operatorname{tg} \varphi$, unghiul φ fiind cuprins între tangenta geometrică într-un punct curent al curbei și axa Ox

$$L = a \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.26)$$

Avem de asemenea

$$\sin \varphi = \frac{L}{y}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{y}. \quad (9.27)$$

Raza de curbura se poate deduce din relația (9.6)

$$\rho = \frac{-N}{p_y} = \frac{-N}{-p \cos \varphi} = \frac{py}{p \cos \varphi} = \frac{y}{\cos \varphi} = \frac{y^2}{a}. \quad (9.28)$$

Raza de curbura ρ este deci egală cu normala la curbă, cuprinsă între punctul curent respectiv și axa Ox .

Aplicații. 1°. Se dă lănișorul suspendat în două puncte și având lungimea cunoscută. Se cere să se determine parametrul a .

În fig. 9.3 este reprezentat un lănișor suspendat în punctele A și B . Distanța verticală și orizontală între aceste două puncte este

$$2l = l_1 + l_2, \quad 2h = h_1 - h_2.$$

Lungimea totală a lănișorului va fi

$$2L = L_1 + L_2 = a \left(\operatorname{sh} \frac{l_1}{a} + \operatorname{sh} \frac{l_2}{a} \right).$$

Avem de asemenea

$$2h = h_1 - h_2 = a \left(\operatorname{ch} \frac{l_1}{a} - \operatorname{ch} \frac{l_2}{a} \right).$$

Ridicînd la pătrat ambele relații și scăzînd a doua din prima, după o serie de transformări de funcții hiperbolice, obținem

$$L^2 - h^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{a}.$$

Rezultă o relație între parametrul a și cîntitățile cunoscute l , L și h

$$a \operatorname{sh} \frac{l}{a} = \sqrt{L^2 - h^2},$$

de unde se poate calcula valoarea acestui parametru.

2°. Un fir omogen de lungime $2L = 120$ m și greutate $p = 10$ kgf/m este suspendat în două puncte A și B , situate pe aceeași orizontală, la distanța $2l = 100$ m. Să se determine parametrul a , săgeata f , unghiul α cuprins între tangenta în A și orizontală, precum și tensiunea și reacțiunile în A și B .

Din relația (9.23), pentru $x = l$ deducem

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{l}{a}}{\frac{l}{a}} = \frac{L}{l} = 1,2.$$

Cu ajutorul tabelelor de funcții hiperbolice, căutăm prin încercări o valoare $\frac{l}{a}$ care satisface ecuația de mai înainte și anume:

$$\frac{l}{a} = 1,065, \quad \text{deci } a = \frac{50}{1,065} = 47 \text{ m.}$$

Ordonatele extremităților sînt

$$y_A = y_B = \sqrt{L^2 + a^2} = 76,2 \text{ m.}$$

Săgeata f se obține din

$$f = y_A - a = 29,2 \text{ m.}$$

Tensiunea la vîrfurile lănișorului și la extremități este

$$H = a \cdot p = 47 \cdot 10 = 470 \text{ kgf.}$$

$$N_A = N_B = y_A \cdot p = 76,2 \cdot 10 = 762 \text{ kgf.}$$

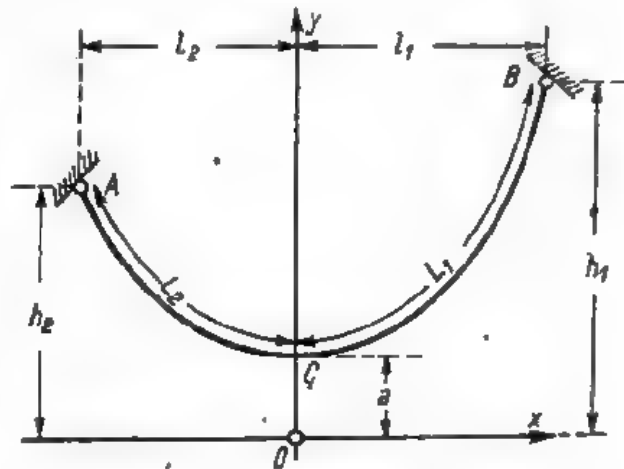


Fig. 9.3

Reacțiunile verticale în punctele de suspensie sînt

$$V_A = V_B = pL = 10 \cdot 60 = 600 \text{ kgf},$$

de unde

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_A}{H} = \frac{600}{470} = 1,278, \quad \alpha = 51^\circ 58'.$$

§ 4. Fir suspendat la extremități, acționat de o forță repartizată, de direcție constantă și proporțională cu lungimea proiecției elementului de fir pe un plan perpendicular pe direcția forței. Parabola. Alegem același sistem de axe ca la punctul precedent, firul fiind situat în planul xOy , iar forța unitară repartizându-se uniform de-a lungul axei Ox . Relațiile (9.12), (9.13), (9.14) vor fi valabile și în acest caz.

Forța unitară p paralelă cu axa Oy , din relația (9.14) este considerată ca fiind funcție de arcul de curbă s . Pentru rezolvarea problemei propuse, înlocuim această forță cu o forță repartizată q , paralelă cu Oy , însă fiind funcție de x . Pentru o porțiune ds infinit mică a curbei funiculară, vom avea

$$p ds = q dx.$$

Înlocuind în relația (9.14), obținem

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q, \quad (9.29)$$

unde H , conform cu (9.13), reprezintă proiecția constantă a tensiunii N pe axa Ox .

Integrînd succesiv de două ori și ținînd seamă că q este constant conform enunțului problemei, avem

$$y' = \frac{q}{H} (x - x_0), \quad (9.30)$$

$$y = \frac{q}{2H} (x - x_0)^2 + y_0. \quad (9.31)$$

Ultima ecuație reprezintă tocmai curba funiculară a firului, care este o parabolă. Cazul de încărcare examinat intervine în practică mai ales la firele acționate de sarcini provenite din depunerile de zăpadă. De asemenea, precum vom vedea mai departe, în tehnică se aproximează de multe ori lanțisorul cu o parabolă, în special la firele acționate de greutatea proprie și care au o săgeată relativ mică.

În ecuațiile (9.30) și (9.31), x_0 și y_0 sînt două constante de integrare. Efectuînd o translație a axelor de coordonate, astfel încît aceste constante să se anuleze, obținem

$$y' = \frac{q}{H} x, \quad (9.32)$$

$$y = \frac{q}{2H} x^2. \quad (9.33)$$

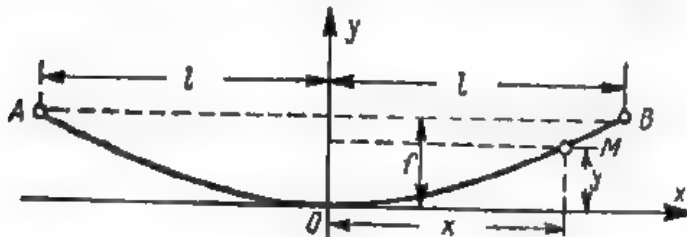


Fig. 9.4

Parabola reprezentată de ultima ecuație este simetrică față de axa Oy , iar axa Ox este tangentă în vârful ei. Dacă notăm cu f săgeata în cazul unei parabole simetrice (fig. 9.4),

și particularizăm relația (9.33) pentru punctele de suspensie, avem

$$f = \frac{q}{2H} l^2, \quad (9.34)$$

de unde se deduce în acest caz, valoarea tensiunii în vârful parabolei

$$H = \frac{ql^2}{2f}. \quad (9.35)$$

Eliminând pe H între (9.35) și (9.33), obținem o altă formă a ecuației parabolei, în cazul când cunoaștem săgeata f

$$y = \frac{f}{l^2} x^2. \quad (9.36)$$

Tensiunea într-un punct oarecare se găsește din (9.13) și (9.32)

$$N = H \frac{ds}{dx} = H \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{H^2 + q^2 x^2}. \quad (9.37)$$

În punctele de suspenzie ale unei parabole simetrice avem

$$N_A = N_B = \frac{ql}{2f} \sqrt{4f^2 + l^2}. \quad (9.38)$$

Lungimea arcului OM al parabolei se calculează după metodele obișnuite analitice

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{q^2}{H^2} x^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{4f^2}{l^2} x^2} dx.$$

De obicei, se utilizează formula aproximativă

$$L \approx x \left(1 + \frac{2}{3} \frac{y^2}{x^2} \right), \quad (9.39)$$

pentru parabole cu săgeată relativă $\left(\frac{f}{l}\right)$ mică, formulă obținută prin dezvoltarea în serie a integralei precedente.

Aplicație. Un cablu suspendat în A și B (fig. 9.5) este acționat de o sarcină verticală de 4 kgf/m uniform repartizată pe orizontală. Punctul D este situat cu 6 m mai sus ca punctul A . Săgeata față de o orizontală prin A este de 2 m, iar distanța orizontală dintre A și B este de 300 m. Neglijând greutatea proprie a firului, se cer valorile tensiunilor în A , B și O .

Folosind notațiile din figură și prelungind parabola până în A' , simetric cu B , avem

$$f - h = \frac{f}{l^2} l_1^2, \quad l + l_1 = b.$$

Din aceste două expresii obținem

$$l = \frac{b}{1 + \sqrt{1 - \frac{h}{f}}}, \quad l_1 = b \frac{\sqrt{1 - \frac{h}{f}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{h}{f}}}.$$

În cazul nostru, înlocuind cu valorile date, obținem

$$l = 200 \text{ m}, \quad l_1 = 100 \text{ m}.$$

Tensiunile în punctele indicate vor fi

$$N_0 = H = \frac{ql^2}{2f} = \frac{4 \cdot 40\,000}{2 \cdot 8} = 10\,000 \text{ kgf},$$

$$N_A = \frac{q \cdot l_1}{2(f-h)} \sqrt{4(f-h)^2 + l_1^2} = \frac{4 \cdot 100}{2 \cdot 2} \sqrt{4 \cdot 4 + 10\,000} = 10\,008 \text{ kgf}.$$

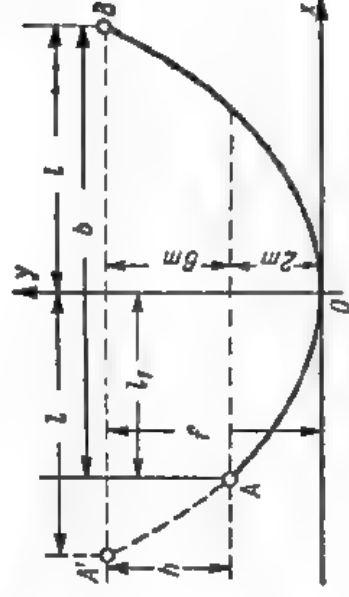


Fig. 9.5

Tot astfel găsim

$$N_H = 10\,032 \text{ kg.}$$

Observație. Comparând valorile obținute pentru N_A și N_H cu cea obținută pentru N_0 se deduce că tensiunea se poate considera practic constantă, adică se poate neglija termenul $q^2 x^3$ din formula (9.37), respectiv termenul $4f^3$ din formula (9.38) și se poate considera $N = H = \frac{q l^3}{8}$ [v. formula (9.35)].

§ 5. Lăușor cu săgeată relativ mică. Dacă firele suspendate pe deschideri mari au săgeți foarte mici, atunci tensiunea crește considerabil. În acest caz, componenta orizontală H a tensiunii este cu mult mai mare decât greutatea proprie a firului și în consecință putem neglija puterile mai mari ca 3 ale raportului $\frac{2pL}{H}$, L fiind semilungimea firului. Deoarece însă întotdeauna $x < 2L$, urmează că putem neglija de asemenea aceleași puteri ale raportului

$$\frac{x^3 p}{H} = \frac{x}{a}.$$

Dezvoltând în serie funcțiile hiperbolice care intervin în formulele lăușorului, aproximăm

$$\operatorname{sh} \frac{x}{a} \approx \frac{x}{a} + \frac{x^3}{6a^3}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{a} \approx 1 + \frac{x^2}{2a^2}.$$

Înlocuind în relațiile (9.21), (9.22), (9.23), obținem

$$N = H + \frac{p^2}{2H} x^2 \approx H, \quad (9.40)$$

$$y = \frac{H}{p} + \frac{p}{2H} x^2, \quad (9.41)$$

$$L = x + \frac{p^2}{6H^2} x^3. \quad (9.42)$$

Se observă că ecuația a doua reprezintă o parabolă identică cu parabola (9.33). Însă deplasată de-a lungul axei Oy cu distanța $\frac{H}{p} = a$. Prin urmare, un lăușor cu săgeată relativ mică poate fi studiat, utilizând formulele deduse anterior pentru parabolă.

Lungimea aproximativă L a arcului măsurat de la vîrf, se poate pune

$$L = x \left(1 + \frac{p^2}{6H^2} x^2 \right) = x \left(1 + \frac{2}{3} \frac{y^2}{x^2} \right),$$

dacă eliminăm raportul $\frac{p}{H}$ din (9.42) și din ecuația (9.33) a parabolei care are vîrful în originea axelor. În acest fel se obține relația (9.39).

Se observă de asemenea că valoarea (9.40) a tensiunii este identică cu valoarea (9.37) obținută la parabolă, dacă se neglijează în dezvoltarea în serie a relației (9.37) puterea a patra a raportului $\frac{p^2}{H^2}$. Practic tensiunea N se presupune constantă (vezi observația de la aplicația 3°).

§ 6. Fir acționat de forțe concentrate. S-a arătat că un poligon format din bare articulate, care este acționat de forțe concentrate aplicate la

noduri, poate fi înlocuit cu un fir perfect flexibil și inextensibil, de greutate neglijabilă, dacă toate barele sînt supuse numai unor eforturi de întindere. Într-adevăr, un fir acționat de două forțe aplicate la extremitățile lui, este în echilibru numai dacă cele două forțe sînt egale și de sens contrar și au un suport comun, iar forma de echilibru a acestui fir este o linie dreaptă care coincide cu suportul comun al celor două forțe.

Prin urmare, problema firului acționat de forțe concentrate se reduce, principial, la determinarea poligonului funicular al acestor forțe. Diferitele condiții care se pot impune acestui poligon funicular, în scopul determinării unice a formei lui, vor fi examinate în cadrul staticii grafice (cap. X, § 6—7).

A p l i c a ț i e. 4°. Un cablu de greutate constantă p , suspendat în punctele A și B , suportă o forță verticală concentrată P în punctul C (fig. 9.6). Cunoscînd cotele punctelor A și B față de C , precum și distanțele orizontale respective, se cere să se determine tensiunile în A și B , utilizînd formulele aproximative.

Porțiunile de cablu AC și BC se asimilează cu arce de parabolă, iar originea axelor de coordonate se alege în C . Pentru parabola AC , axele se notează cu x_1 , y_1 , iar pentru BC , cu x_2 , y_2 .

Ecuațiile celor două parabole vor fi

$$AC: y_1 = \frac{p}{2H} x_1^2 + C_1 x_1, \quad BC: y_2 = \frac{p}{2H} x_2^2 + C_2 x_2,$$

C_1 și C_2 fiind două constante.

În punctele A și B avem

$$h_1 = \frac{p}{2H} l_1^2 + C_1 l_1, \quad h_2 = \frac{p}{2H} l_2^2 + C_2 l_2.$$

Componenta verticală a tensiunii în fir are, în general, expresia:

$$V = H \frac{dy}{dx} = px + CH.$$

În punctul C , unde $x=0$, expresia lui V va pierde primul termen. Particularizînd pe V pentru stînga și dreapta punctului C și înlocuind constantele C_1 și C_2 cu valorile lor de mai înainte găsim

$$V_{1C} = \frac{h_1}{l_1} H - \frac{p}{2} l_1, \quad V_{2C} = \frac{h_2}{l_2} H - \frac{p}{2} l_2.$$

În punctul C , forța concentrată P este echilibrată de tensiunile N_{1C} și N_{2C} din cele două porțiuni de fire (fig. 9.6, b).

Ecuația de proiecție pe orizontală a acestor forțe ne dă: $H_1 = H_2 = H$, iar ecuația de proiecție pe verticală ne dă valoarea lui H

$$H \left(\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2} \right) - \frac{p}{2} (l_1 + l_2) = P,$$

sau

$$H = \frac{P + \frac{p}{2} (l_1 + l_2)}{\frac{h_1}{l_1} + \frac{h_2}{l_2}},$$

unde α_1 și α_2 sînt unghiurile formate cu orizontala de AC și BC .

Componentele verticale ale tensiunilor din A și B vor fi

$$V_A = \frac{pl_1}{2} + \frac{h_1}{l_1} H, \quad V_B = \frac{pl_2}{2} + \frac{h_2}{l_2} H,$$

iar tensiunile la aceste puncte

$$N_A = \sqrt{H^2 + V_A^2}, \quad N_B = \sqrt{H^2 + V_B^2}.$$

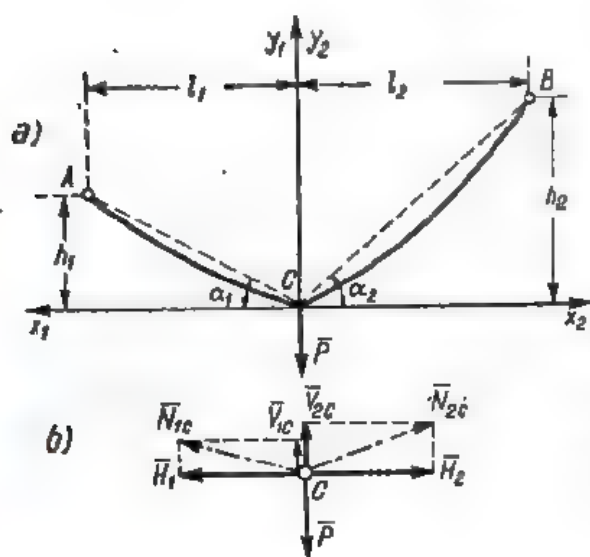


Fig. 9.6

§ 7. Echilibrul unui fir situat pe o suprafață lucie și acționat de forțe repartizate. Fie

$$f(x, y, z) = 0 \quad (9.43)$$

ecuația suprafeței lucii pe care se sprijină firul, raportată la triedrul triortogonal fix $Oxyz$. Vom considera că legătura firului cu această suprafață este bilaterală.

Un element ds al firului este acționat de forța $\bar{p}ds$ precum și de reacțiunea $\bar{r}ds$ a suprafeței.

Reacțiunea suprafeței are direcția normalei la suprafață, în orice punct al firului, deci se poate scrie

$$\bar{r} = \lambda \text{ grad } f. \quad (9.44)$$

Ecuațiile de proiecție pe triedrul $Oxyz$, care exprimă echilibrul elementului ds al firului, se vor obține din ecuația (9.10), la care vom adăuga proiecțiile reacțiunii \bar{r}

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) + p_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.45)$$

Aceste trei ecuații diferențiale, împreună cu (9.43) și (9.11) permit determinarea în funcție de s , a necunoscutelor x, y, z, N și λ .

Pentru a stabili ecuațiile intrinseci de echilibru ale elementului de fir, vom utiliza relația vectorială de echilibru (9.4), ținând seama și de reacțiunea \bar{r} a suprafeței. Ecuațiile (9.4) devin în acest caz

$$\frac{dN}{ds} \bar{\tau} + \frac{N}{\rho} \bar{\nu} + \bar{p} + \bar{r} = 0, \quad (9.46)$$

unde $\bar{\tau}$ și $\bar{\nu}$ sînt versorii tangentei și normalei principale la curba firului în punctul considerat M , iar ρ este raza de curbura a firului în același punct.

Vom proiecta relația precedentă pe triedrul lui Darboux, format din versorii $\bar{n}, \bar{\tau}$ și \bar{g} , unde \bar{n} este versorul normal la suprafață, iar $\bar{g} = \bar{n} \times \bar{\tau}$

un versor situat în planul tangent la suprafață în punctul M și perpendicular pe versorul tangent $\bar{\tau}$ la curbă (fig. 9.7); \bar{g} determină normala geodezică a curbei firului; \bar{v} , \bar{g} și \bar{n} sînt situați în planul normal la fir, în M .

Multiplicînd scalar relația (9.46) succesiv cu $\bar{\tau}$, \bar{g} , \bar{v} obținem

$$\frac{dN}{ds} + p_{\tau} = 0, \quad \frac{N}{\rho} \bar{v} \cdot \bar{g} + p_g = 0, \quad \frac{N}{\rho} \bar{v} \cdot \bar{n} + p_n + r = 0, \quad (9.47)$$

unde p_{τ} , p_g și p_n sînt proiecțiile lui \bar{p} pe versorii $\bar{\tau}$, \bar{g} , \bar{n} . Notînd cu θ unghiul format de \bar{n} și \bar{v} , avem

$$\bar{v} \cdot \bar{g} = \sin \theta, \quad \bar{n} \cdot \bar{v} = \cos \theta.$$

Expresiile

$$p_n = \frac{p}{\cos \theta}, \quad p_g = \frac{p}{\sin \theta} \quad (9.48)$$

poartă respectiv denumirile de *rază de curbura normală a suprafeței* pe direcția $\bar{\tau}$ și *rază de curbura geodezică*. Cu aceasta, relațiile (9.47) devin

$$\frac{dN}{ds} + p_{\tau} = 0, \quad \frac{N}{\rho_g} + p_g = 0, \quad \frac{N}{\rho_n} + p_n + r = 0. \quad (9.49)$$

A p l i c a ț i e. 5°. Să se determine forma de echilibru a unui fir așezat pe o suprafață lucie, asupra firului neacționînd nici o forță exterioară dată ($\bar{p} = 0$).

Din prima relație (9.49) rezultă $N = \text{const}$. Conform relației a doua (9.49), urmează sau $N = 0$, adică firul nu este întins, forma lui fiind arbitrară, sau $\rho_g = \infty$ și $N = \text{const} \neq 0$, adică firul este așezat pe o curbă geodezică a suprafeței.

Aceste rezultate au fost menționate și în § 2 observația f.

§ 8. Echilibrul unui fir situat pe o suprafață aspră și acționat de forțe repartizate. În cazul cînd suprafața pe care se reazemă firul este aspră, reacțiunea acesteia asupra fiecărui element al firului se poate descompune într-o componentă normală la suprafață $\bar{r} \cdot ds$ și o componentă tangentă la suprafață, $\bar{\Phi} ds$, numită forță de frecare. Notînd cu α unghiul format de forța de frecare $\bar{\Phi} ds$ cu tangenta $\bar{\tau}$ la fir, ecuațiile intrinseci de echilibru (9.49) devin

$$\frac{dN}{ds} + p_{\tau} + \Phi \cos \alpha = 0, \quad \frac{N}{\rho_g} + p_g + \Phi \sin \alpha = 0, \quad \frac{N}{\rho_n} + p_n + r = 0. \quad (9.50)$$

Conform celor arătate la cap. III, § 10 se admite, ca rezultat al experiențelor, că valoarea forței de frecare maximă este proporțională cu componenta normală pe suprafață a reacțiunii:

$$\Phi \leq \mu r. \quad (9.51)$$

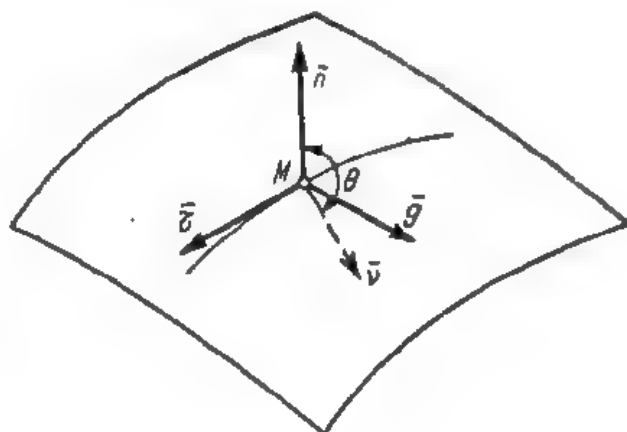


Fig. 9.7

Eliminând forța repartizată Φ de frecare între (9.51) și (9.50) rezultă că pentru aceleași forțe efectiv aplicate \bar{p} , formele de echilibru ale unui fir așezat pe o suprafață aspră vor fi cuprinse în general, între două curbe limită.

În cele ce urmează vom examina cazul în care $\bar{p}=0$, considerînd relația (9.51) la limita dintre echilibru și mișcare. Prin utilizarea relației (9.51), în care păstrăm numai semnul „egal”, ecuațiile (9.50) devin

$$\frac{dN}{ds} + \mu r \cos \alpha = 0, \quad \frac{N}{\rho_g} + \mu r \sin \alpha = 0, \quad \frac{N}{\rho_n} + r = 0. \quad (9.52)$$

Eliminînd r și α între relațiile precedente, se obține cu ajutorul relațiilor (9.48) o ecuație diferențială pentru valorile extreme ale lui N .

$$\frac{dN_{ext\ n}}{N_{ext\ n}} = \pm \frac{ds}{\rho_n} \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \theta}.$$

Prin integrare găsim

$$N_{ext\ n} = C e^{\pm \int \frac{ds}{\rho_n} \sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad (9.53)$$

unde C este constanta de integrare.

Valoarea dublă a exponentului corespunde valorilor minime și maxime ale lui N .

Dacă am fi utilizat relația (9.51) în tot intervalul de echilibru, se observă ușor că am fi obținut pentru valoarea efortului N în fir, următoarea dublă inegalitate

$$N_{min} \leq N(s) \leq N_{max}. \quad (9.54)$$

În cazul cînd firul este așezat pe o geodezică a suprafeței, $\operatorname{tg} \theta = 0$, iar μ este constant, expresia (9.53) devine

$$\left. \begin{matrix} N_{min} \\ N_{max} \end{matrix} \right\} = C e^{\mp \mu \int \frac{ds}{\rho_n}}.$$

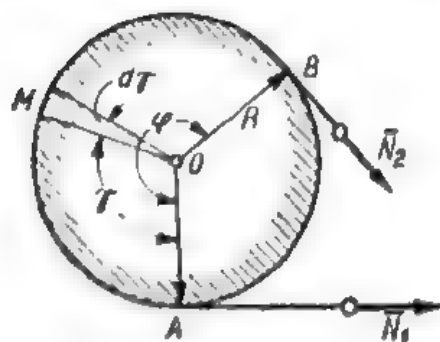


Fig. 9.8

În tehnică intervin foarte des cazurile în care firul este înfășurat pe o suprafață cilindrică circulară, după o secțiune circulară a acesteia.

Sînt A și B cele două puncte extreme de tangență ale firului cu cilindrul aspru (fig. 9.8); γ este unghiul format de raza în A cu o rază oarecare în punctul M , iar φ este unghiul de înfășurare a firului format de razele OA și OB . În acest caz

$$\int \frac{ds}{\rho_n} = \int \frac{ds}{R} = \int d\gamma = \gamma.$$

Pentru $\gamma=0$ avem $N=N_1$, iar pentru $\gamma=\varphi$ avem $N=N_2$. Urmează, conform cu (9.55)

$$\left. \begin{array}{l} N_{1 \min} \\ N_{1 \max} \end{array} \right\} = N_1 e^{\mp \mu \varphi}.$$

Se observă că termenul $e^{\mu \varphi}$ crește foarte repede o dată cu creșterea unghiului φ de înfășurare a firului. Astfel, dacă $\mu=0,3$, se obține pentru:

$$\begin{array}{ll} \varphi=2\pi & e^{\mu \varphi} \approx 6,59, \\ \varphi=3 \times 2\pi & e^{\mu \varphi} \approx 285,68, \\ \varphi=4 \times 2\pi & e^{\mu \varphi} \approx 1881,5. \end{array}$$

Rezultă că dispozitivele mecanice bazate pe fenomenul de frecare a firelor, ne vor da posibilitatea ca, utilizând o forță mică $N_{2 \min}$ și cu ajutorul unui corp cilindric fix pe care se înfășoară firul, să putem echilibra o forță mare N_1 (de exemplu frîne cu bandă, cabestane, babale etc.).

X. ELEMENTE DE STATICĂ GRAFICĂ

§ 1. **Generalități.** Soluțiile grafice în problemele de statică prezintă un interes deosebit, în special pentru tehnicieni. Ele au fost dezvoltate pe larg în a doua jumătate a secolului trecut și la începutul secolului nostru deși nevoia unor calcule din ce în ce mai exacte a făcut ca soluțiile grafice să fie folosite mai puțin în ultimul timp.

Calculul grafic este util în multe probleme, deoarece:

- erorile grosolane sînt mult mai ușor de evitat pe cale grafică decît pe cale analitică;
- în multe împrejurări conduce mai repede decît calculele analitice la rezultate suficiente pentru practică.

În special, atunci cînd pentru alegerea unei soluții trebuie studiate mai multe variante, este recomandabil ca primele studii să se facă pe cale grafică. Pe baza studiilor grafice se poate alege soluția definitivă și numai aceasta se calculează exact, prin mijloace analitice.

În capitolul de față sînt prezentate cîteva elemente de bază ale metodelor grafice folosite în statică.

A. FORȚE CONCURRENTE ÎN PLAN

§ 2. **Compunerea forțelor concurente în plan.** Poligonul forțelor. Așa cum s-a arătat și în primele capitole, forțele concurente se compun cu ajutorul poligonului forțelor.

Dacă în punctul O sînt aplicate n forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (fig. 10.1, *a*) rezultanta lor se obține cu ajutorul construcției din fig. 10.1, *b*, unde dintr-un

punct arbitrar A , se aşază vectorii $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, astfel ca originea unui vector să coincidă cu extremitatea celui precedent. Unind apoi originea A a primului vector cu extremitatea B a ultimului vector, se obţine vectorul $\vec{AB} = \vec{R}$ a cărui valoare, direcţie şi sens coincid cu ale rezultantei

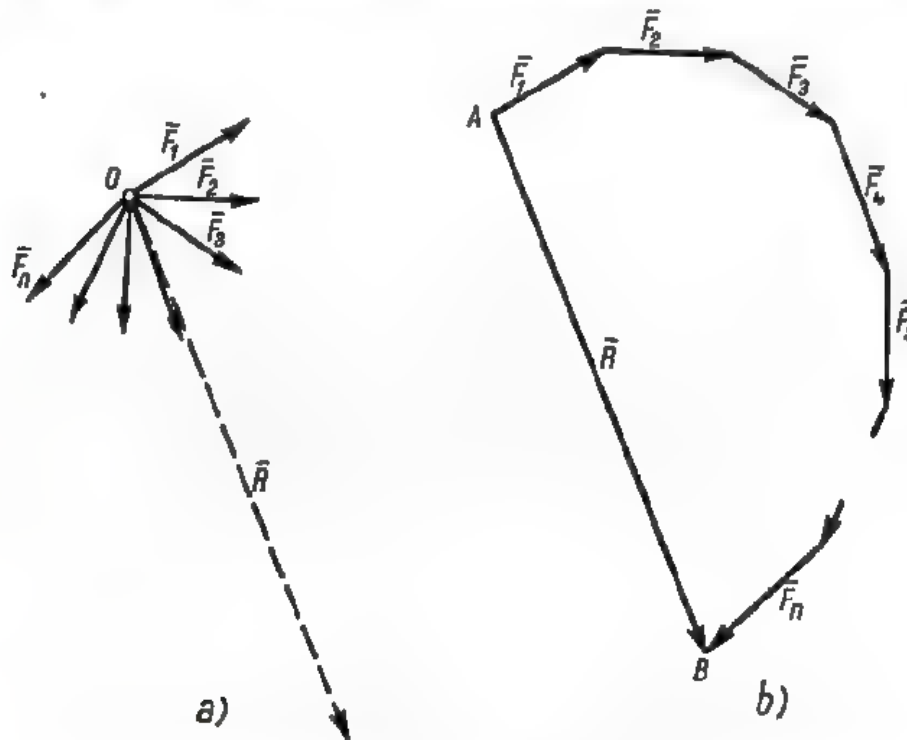


Fig. 10.1

sistemului de forţe dat. Ducînd prin O un vector echipolent cu \vec{AB} , acesta va reprezenta rezultanta \vec{R} a sistemului de forţe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$.

Dacă punctul B coincide cu A , adică dacă poligonul de forţe este un poligon de forţe închis, rezultanta \vec{R} a sistemului de forţe concurente în O este nulă, adică forţele $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ sînt în echilibru.

Deci: condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de forţe concurente să fie în echilibru este ca poligonul forţelor să fie un poligon închis.

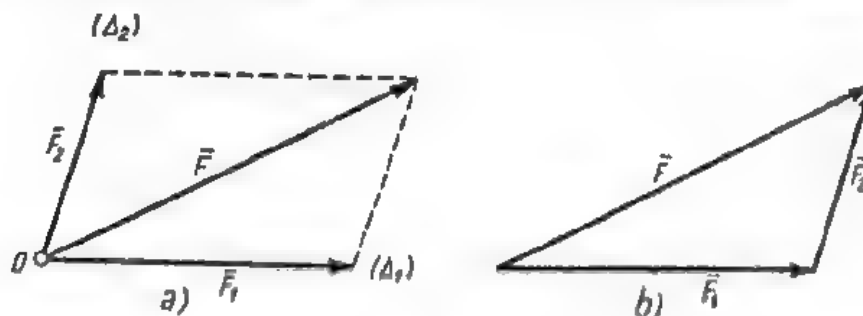


Fig. 10.2

§ 3. Descompunerea unei forţe după două direcţii concurente, coplanare cu forţa. Se foloseşte regula paralelogramului ca în fig. 10.2, a, unde forţa \vec{F} a fost descompusă în componentele \vec{F}_1 şi \vec{F}_2 după direcţiile Δ_1 şi Δ_2 ,

concurente în O pe suportul forței \vec{F} . În mod obișnuit nu se construiește paralelogramul chiar pe forța \vec{F} ca în fig. 10.2, a , ci se duce un vector echipolent cu \vec{F} și prin extremitățile sale se duc paralele la Δ_1 și Δ_2 (fig. 10.2, b). Cele două laturi ale triunghiului care formează un poligon de forțe cu originea în originea vectorului \vec{F} și cu extremitatea în extremitatea, lui \vec{F} , determină valorile, direcțiile și sensurile componentelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 .

Descompunerea unei forțe după trei sau mai multe direcții concurente pe forță și coplanare cu ea, este o problemă nedeterminată. În fig. 10.3, a se dă forța \vec{F} și direcțiile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ concurente în O . Dacă

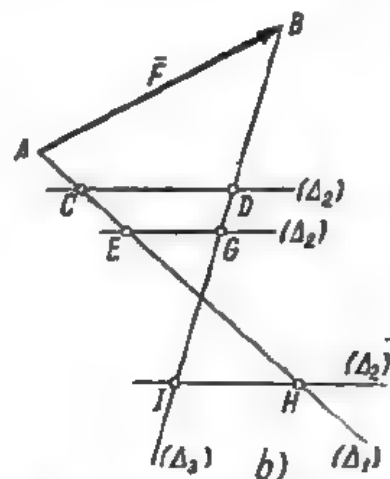
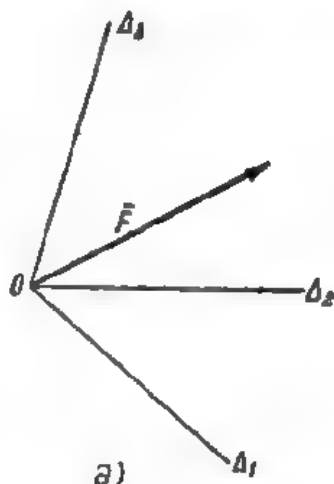


Fig. 10.3

se duce un vector echipolent cu \vec{F} și prin extremitățile sale se duc paralele la Δ_1 și Δ_3 și apoi o serie de paralele la Δ_2 ca în fig. 10.3, b , fiecare dintre paralele la Δ_2 conduce la câte un poligon de forțe, care determină câte o serie de componente după direcțiile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ care satisfac problema. Astfel, componentele pe cele trei direcții pot fi:

$$\overline{AC}, \overline{CD}, \overline{DB}, \text{ sau } \overline{AE}, \overline{EG}, \overline{GB}, \text{ sau } \overline{AH}, \overline{HI}, \overline{IB} \text{ etc.}$$

Problema are deci o infinitate de soluții.

B. FORȚE OARECARE ÎN PLAN

§ 4. **Compunerea forțelor. Poligon funicular.** Dacă asupra unui solid acționează un număr oarecare de forțe în același plan, ele se pot compune pe rînd cu ajutorul regulii paralelogramului, așa cum se arată în fig. 10.4. Forțele \vec{F}_1 și \vec{F}_2 pot fi înlocuite de rezultanta lor $\vec{R}_{1,2}$, aceasta se compune apoi cu \vec{F}_3 , obținîndu-se rezultanta $\vec{R}_{1,3}$, iar $\vec{R}_{1,3}$ se compune cu \vec{F}_4 , obținîndu-se rezultanta $\vec{R}_{1,4}$, care este echivalentă cu sistemul inițial de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Acest procedeu este rar întrebuintat, deoarece operația grafică este uneori dificil de aplicat, datorită faptului că intersecțiile dintre forțe nu intră totdeauna în cadrul desenului.

De aceea, se folosește o altă metodă numită *metoda poligonului funicular*. Se observă că valoarea, direcția și sensul rezultantei \vec{R} , obținîndu-se din compunerea succesivă a forțelor după regula paralelogramului, depinde

numai de valorile, direcțiile și sensurile forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ (fig. 10.4) care acționează solidul, dar nu depinde de pozițiile acestor forțe, astfel încât aceste elemente ale rezultantei \vec{R} se pot obține cu ajutorul unui poligon de forțe ca în fig. 10.5, *b* unde, începând din *A* se așază cap la cap vectorii

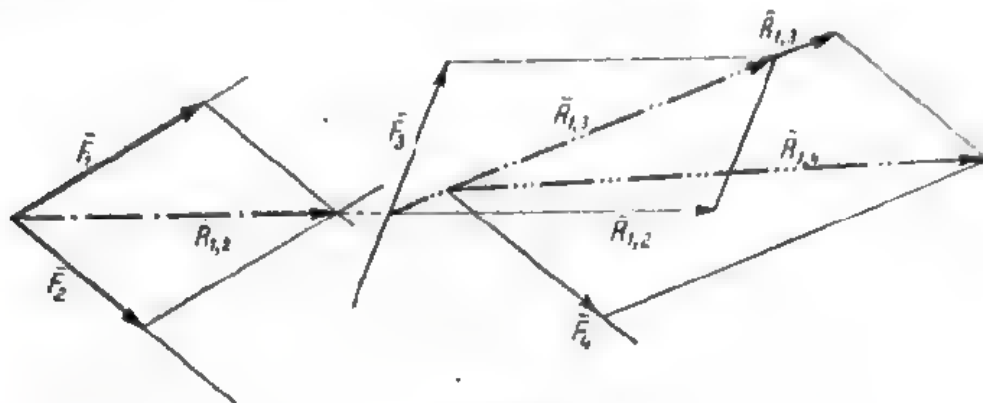


Fig. 10.4

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Vectorul \overline{AB} reprezintă în valoare, direcție și sens rezultanta \vec{R} a sistemului de forțe din fig. 10.5, *a*.

Mai trebuie determinată poziția rezultantei, și pentru aceasta este suficient să se cunoască un singur punct al suportului rezultantei. Pentru determinarea acestui punct se folosește o construcție grafică care să înlocuiască sistemul de forțe $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_4$ care acționează solidul, cu un sistem echivalent alcătuit însă numai din două forțe.

În vecinătatea poligonului de forțe *ACDEB* (fig. 10.5, *b*) se ia un punct *O* care se unește cu punctele *A, C, D, E, B*. Punctul *O* se numește *pol*, iar segmentele *OA, OC, OD* etc. *raze polare*. Punctul *O* se poate lua arbitrar, însă în nici un caz pe dreapta *AB*.

Dintr-un punct *I* din vecinătatea forței \vec{F}_1 (fig. 10.5, *a*) se duce paralela la *OA* pînă în punctul *G* de intersecție cu \vec{F}_1 , iar de aici paralela la *OC* pînă la punctul *K* de intersecție cu \vec{F}_3 , apoi din *K* paralela la *OD* pînă în punctul *L* de intersecție cu \vec{F}_2 , din *L* paralela la *OE* pînă în punctul *M* de intersecție cu \vec{F}_4 și de aici paralela la *OB*.

În punctul *G* forța \vec{F}_1 poate fi înlocuită cu componentele sale de pe direcțiile *GI* și *GK*, ale căror valori, direcții și sensuri sînt date de razele polare $\overline{AO} = \vec{f}_0$ și $\overline{OC} = \vec{f}_1$ din poligonul forțelor (fig. 10.5, *b*). La fel se înlocuiește forța \vec{F}_3 prin componentele sale $\vec{f}_1 = \overline{CK}$ și $\vec{f}_2 = \overline{OD}$ în punctul *K*, apoi forța \vec{F}_2 prin componentele sale $\vec{f}_2 = \overline{DL}$ și $\vec{f}_3 = \overline{OE}$, în punctul *L*, și forța \vec{F}_4 prin componentele sale $\vec{f}_3 = \overline{EM}$ și $\vec{f}_4 = \overline{OB}$ în punctul *M*.

În acest mod sistemul de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ din fig. 10.5, *a* a fost înlocuit cu un sistem de forțe echivalent $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ acționînd de-a lungul lanțului *IGKLMN*, lanț care poartă numele de *poligon funicular*. Se observă că de-a lungul suportului *GK* acționează două

forțe \bar{f}_1 și $-\bar{f}_1$ egale și de sens contrar, deci ele au un efect nul asupra solidului. Iar fel sistemul de forțe \bar{f}_2 și $-\bar{f}_2$ pe suportul KL ; \bar{f}_3 și $-\bar{f}_3$ pe suportul LM își anulează efectele astfel că singurele forțe care rămân în poligonul funicular sînt forțele \bar{f}_0 de pe suportul IG și \bar{f}_4 de pe supor-

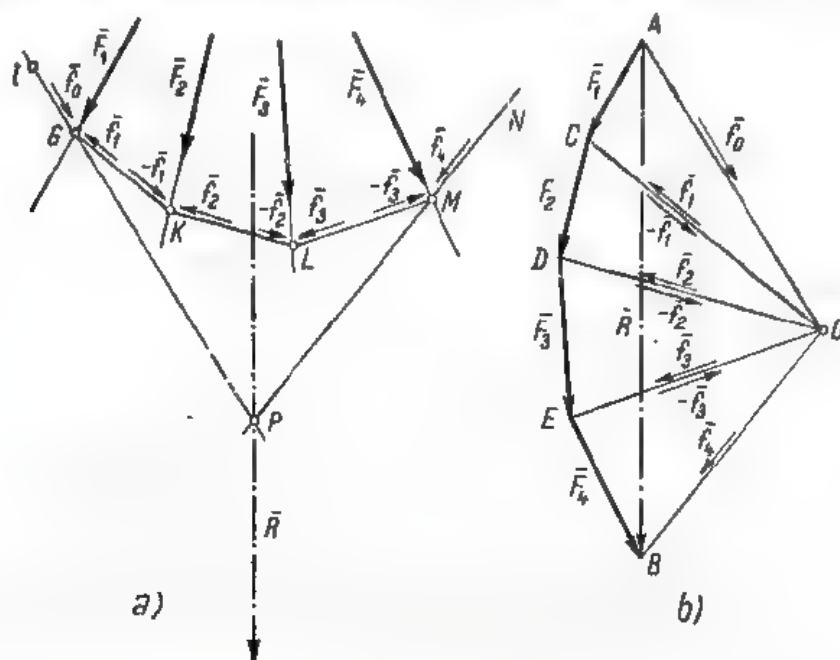


Fig. 10.5

tul MN . Deci sistemul inițial de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ este echivalent cu sistemul celor două forțe \bar{f}_0 și \bar{f}_4 care acționează după dreptele IG și MN . Rezultanta lor va trece prin punctul de intersecție P al acestor două drepte. Problema este astfel rezolvată, căci a fost determinat un punct P al suportului rezultantei \bar{R} , iar valoarea, direcția și sensul ei sînt cunoscute dinainte din poligonul forțelor.

De aici rezultă următoarea regulă pentru compunerea unui sistem de forțe oarecare în plan: se construiește poligonul forțelor date, care determină valoarea, direcția și sensul rezultantei \bar{R} . Se alege un pol și se duc razele polare corespunzătoare. Apoi se construiește un poligon funicular corespunzător acestui pol. Intersecția primei și ultimei laturi de poligon funicular determină un punct prin care trece rezultanta \bar{R} . Deci poligonul de forțe determină valoarea, direcția și sensul rezultantei, iar poligonul funicular determină poziția rezultantei.

Observații. Dacă punctul O ar fi fost luat pe dreapta AB , atunci prima și ultima latură de poligon funicular erau paralele și poziția rezultantei nu putea fi determinată; de aceea, s-a impus restricția ca polul O să nu se găsească pe dreapta AB .

Pentru un același pol O , punctul I , de unde începe construcția poligonului funicular, este arbitrar; deci aceluiasi pol îi corespunde o infinitate de poligoane funiculare. Deoarece punctul O poate fi orice punct al planului, cu excepția punctelor de pe dreapta AB , rezultă că pentru un sistem de forțe se poate construi o triplă infinitate de poligoane funiculare. Toate punctele P care s-ar obține din această triplă infinitate de poligoane funiculare se găsesc pe o aceeași dreaptă, care constituie suportul rezultantei \bar{R} .

Folosirea poligonului de forțe și a poligonului funicular pentru un sistem de forțe oarecare în plan poate conduce la trei cazuri, care se interpretează astfel:

Cazul 1. Poligonul de forțe rămâne deschis, adică segmentul AB din fig. 10.5, b nu este nul. În acest caz, sistemul de forțe conduce la o *rezultantă* $\bar{R} = \overline{AB}$, a cărei poziție este determinată de poligonul funicular, așa cum s-a arătat în fig. 10.5, a .

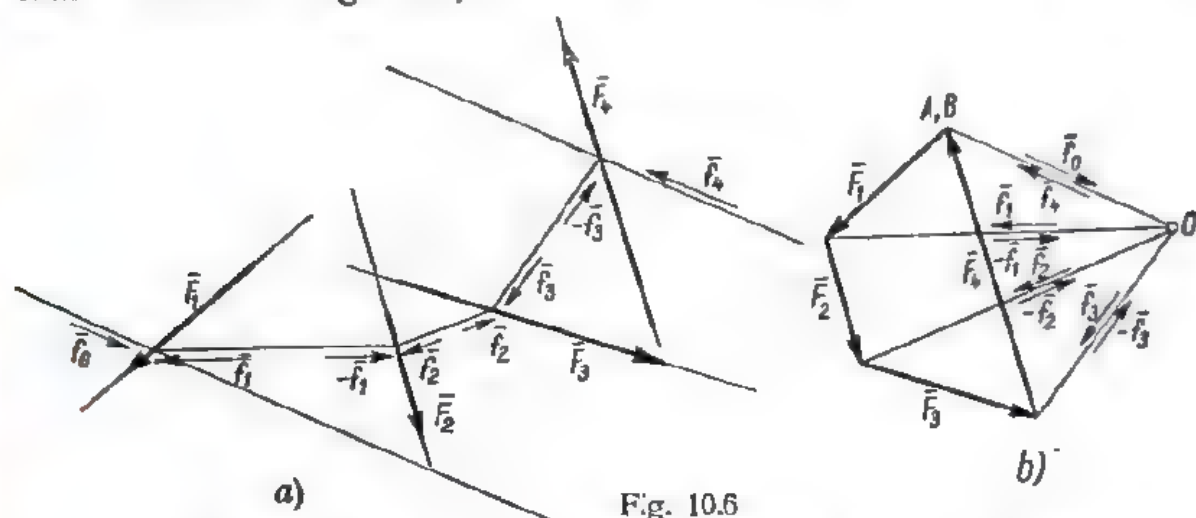


Fig. 10.6

Cazul 2. Poligonul de forțe este un poligon închis, adică punctele A și B se suprapun. În acest caz, prima și ultima rază polară coincid (fig. 10.6, b), iar în poligonul funicular, sistemul de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ (fig. 10.6, a) se reduce la \bar{f}_0 și \bar{f}_4 care sînt paralele, egale și de sens contrar. Dacă suporturile lor nu coincid, așa cum se arată în fig. 10.6, a , atunci sistemul de forțe se reduce la un *cuplu*.

Cazul 3 constituie un caz particular al cazului 2.

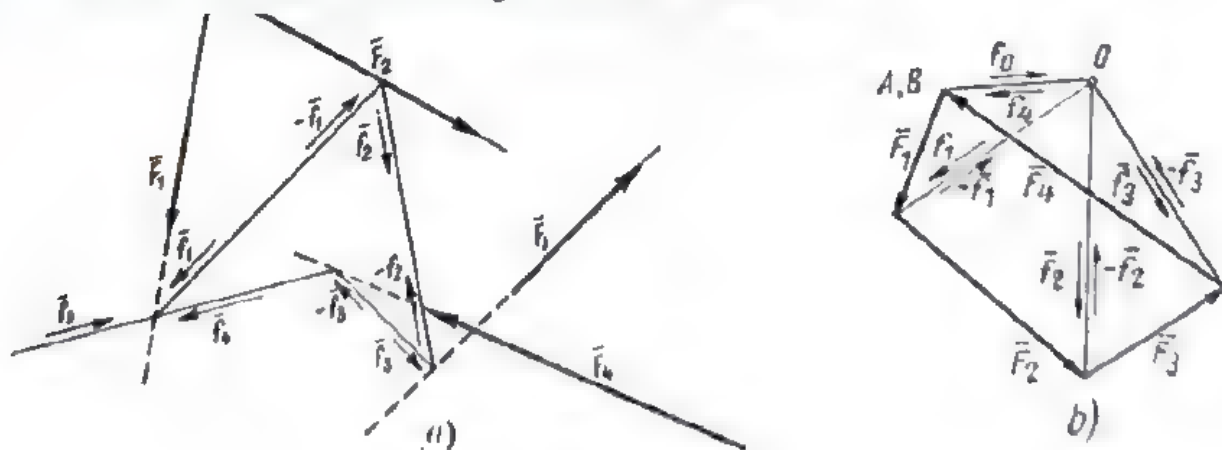


Fig. 10.7

Poligonul de forțe este închis (fig. 10.7, b), iar în poligonul funicular prima latură \bar{f}_0 are același suport cu ultima latură \bar{f}_4 (fig. 10.7, a). În acest caz sistemul de forțe F_1, \dots, F_4 se reduce la două forțe f_0 și f_4 , acționînd după același suport, egale și de sens contrar, care alcătuiesc un sistem echivalent cu zero. Deci sistemul de forțe F_1, F_2, F_3, F_4 este un sistem de forțe în *echilibru*.

De aici rezultă concluzia: *condițiile grafice necesare și suficiente pentru ca un sistem de forțe oarecare în plan, acționând asupra unui solid, să fie în echilibru, sînt: poligonul forțelor să se închidă și poligonul funicular să se închidă (prima și ultima latură de poligon funicular să se suprapună).*

Observații. Fiecărui punct de pe forțele date, unde se întîlnesc două laturi de poligon funicular, îi corespunde un poligon închis în poligonul forțelor. Astfel, punctului K din fig. 10.5, a , unde se întîlnesc forțele \bar{F}_2 , $-\bar{f}_1$ și \bar{f}_2 îi corespunde în fig. 10.5, b triunghiul OCD alcătuit din aceleași forțe \bar{F}_2 , $-\bar{f}_1$, \bar{f}_2 . Se mai observă și proprietatea reciprocă: unui punct de intersecție în poligonul forțelor, de exemplu D din fig. 10.5, b unde se întîlnesc forțele \bar{F}_2 , \bar{F}_3 , \bar{f}_3 , îi corespunde triunghiul alcătuit din aceleași forțe \bar{F}_2 , \bar{F}_3 , \bar{f}_3 din fig. 10.5, a . Aceste observații sînt utile în aplicații.

§ 5. Proprietățile poligoanelor funiculare. Fie sistemul de forțe în plan \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 din fig. 10.8, a . Cu polul O se construiește poligonul funicular \bar{f}_0 , \bar{f}_1 , \bar{f}_2 , \bar{f}_3 , iar cu polul O' se construiește poligonul funicular \bar{f}'_0 , \bar{f}'_1 , \bar{f}'_2 și \bar{f}'_3 . Laturile omoloage ale acestor două poligoane funiculare se întîlnesc în punctele A , B , C , D . Este ușor de arătat că aceste puncte se găsesc pe o dreaptă paralelă cu dreapta OO' a polilor cu care au fost construite poligoanele funiculare. În adevăr, forța \bar{F}_1 poate fi înlocuită cu componentele \bar{f}_0 și \bar{f}_1 în punctul E . De asemenea forța \bar{F}_1 ar putea fi înlocuită cu componentele \bar{f}'_0 și \bar{f}'_1 în punctul G . Dacă se schimbă sensurile forțelor \bar{f}'_0 și \bar{f}'_1

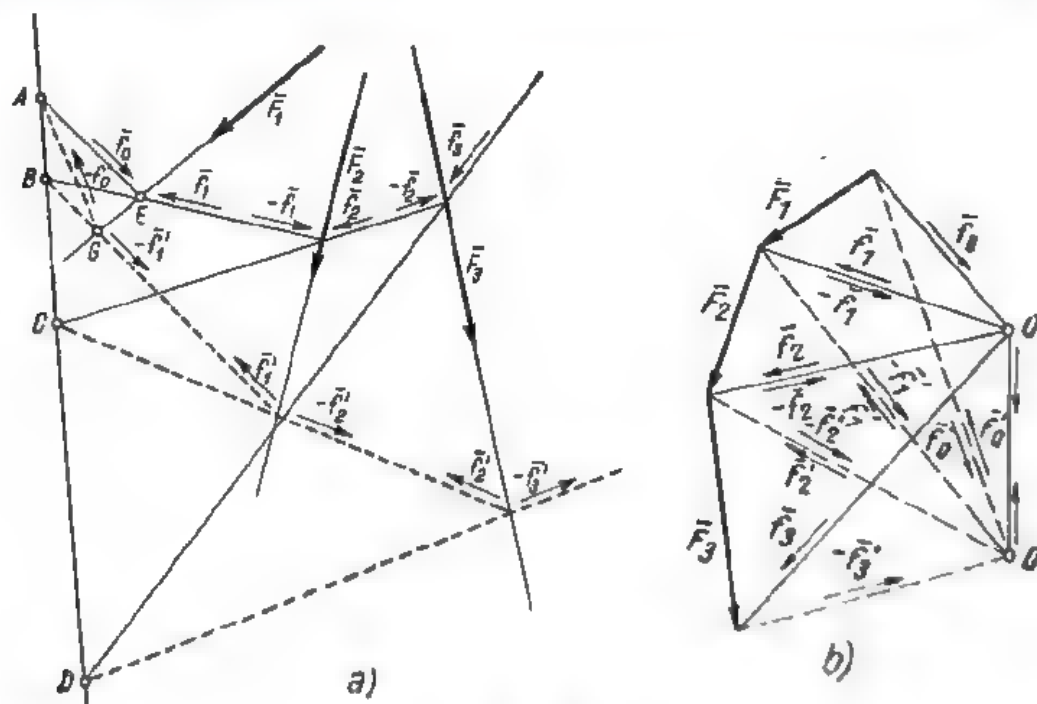


Fig. 10.8

din G , așa cum se arată în fig. 10.8, a , sistemul de forțe \bar{f}_0 , \bar{f}_1 , $-\bar{f}'_0$, $-\bar{f}'_1$ din punctele E și G este echivalent cu zero. Acest sistem de patru forțe în echilibru poate fi grupat și altfel. Se poate compune forța \bar{f}_0 cu forța \bar{f}'_0 și rezultanta lor va trece prin punctul A (punctul lor de intersecție) și va

avea direcția, sensul și valoarea date de vectorul $\overline{O'O}$ din poligonul forțelor ($-\vec{f}_0 + \vec{f}_0 = \overline{O'O}$). Celelalte două forțe \vec{f}_1 și $-\vec{f}_1$ vor da o rezultantă care va trece prin punctul B , care este punctul lor de intersecție și va avea valoarea, direcția și sensul date de vectorul $\overline{OO'}$ din poligonul forțelor ($\vec{f}_1 - \vec{f}_1 = \overline{OO'}$). Deoarece însă sistemul de forțe \vec{f}_0 , $-\vec{f}_0$ și \vec{f}_1 , $-\vec{f}_1$ este în echilibru, trebuie ca cele două rezultante din A și B , paralele cu OO' , să se suprapună. Deci dreapta AB este paralelă cu dreapta OO' . La fel se arată apoi că BC este paralelă cu OO' și așa mai departe, adică punctele A , B , C , D sînt coliniare pe o dreaptă paralelă cu OO' . Această teoremă se enunță astfel: dacă pentru un sistem de n forțe date $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ se construiesc poligoane funiculare cu doi poli diferiți, atunci laturile corespunzătoare de poligon funicular se intersectează în $n+1$ puncte care se găsesc pe o dreaptă paralelă cu linia celor doi poli. Dreapta corespunzătoare poartă numele de *dreapta lui Culmann* (Carl Culmann, 1821–1881).

Această proprietate are multe aplicații în statica grafică.

§ 6. Poligon funicular care trece prin două puncte date. Din proprietatea demonstrată rezultă că pentru un sistem de forțe dat, toate poligoanele funiculare care trec prin două puncte date A și B au polurile pe o dreaptă paralelă cu dreapta AB .

În adevăr, cele două puncte A și B sînt punctele de intersecție ale laturilor omoloage din două poligoane funiculare construite cu polii O și O' . Conform teoremei precedente, dreapta AB trebuie să fie paralelă cu dreapta OO' . Orice alt poligon funicular construit astfel ca laturile care poartă același număr de ordine cu cele de mai sus să treacă prin punctele A și B trebuie să aibă polul pe o paralelă din O dusă la AB . Deci, această dreaptă a polilor conține toți polii poligoanelor funiculare care trec prin punctele A și B . Această proprietate servește pentru determinarea poligoanelor funiculare care trec prin două puncte date. În adevăr, dacă se dă un sistem de forțe și se cere să se construiască un poligon funicular astfel ca o anumită latură să treacă prin punctul A și o alta să treacă prin punctul B , atunci există o infinitate de soluții care satisfac aceste condiții. Polii tuturor poligoanelor care trec prin cele două puncte A și B se vor găsi însă pe o dreaptă paralelă cu AB . Pentru determinarea acestei drepte, este suficient să se găsească un singur poligon funicular care să satisfacă această condiție. Prin polul său se duce paralela la AB și această dreaptă conține totalitatea polilor care satisfac problema. Un asemenea pol se poate determina cu ușurință dacă se cunoaște rezultanta sistemului de forțe, așa cum se arată în fig. 10.9.

Fiind date forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (fig. 10.9, *a*) se construiește poligonul forțelor fig. 10.9, *b*, apoi cu ajutorul unui pol arbitrar O și a razelor polare 0, 1, 2, 3, se construiește un poligon funicular $0', 1', 2', 3'$, cu ajutorul căruia se determină suportul rezultantei care trece prin intersecția laturilor $0'$ și $3'$ (fig. 10.9, *a*).

Dacă se cere ca poligonul funicular să satisfacă condiția ca prima latură a lui să treacă prin punctul A și ultima lui latură prin B , atunci este suficient să se ia un punct oarecare C pe suportul rezultantei și să se

unească cu A și B . Dreptele CA și CB vor fi prima și ultima latură ale unui poligon funicular pentru sistemul de forțe dat. Polul O' al acestui poligon se obține ducând din punctele D și E , în poligonul forțelor, paralele la CA și CB . Dreapta Δ paralelă cu AB , dusă prin O' , reprezintă locul geometric al tuturor polilor poligoanelor funiculare pentru care, dacă prima latură

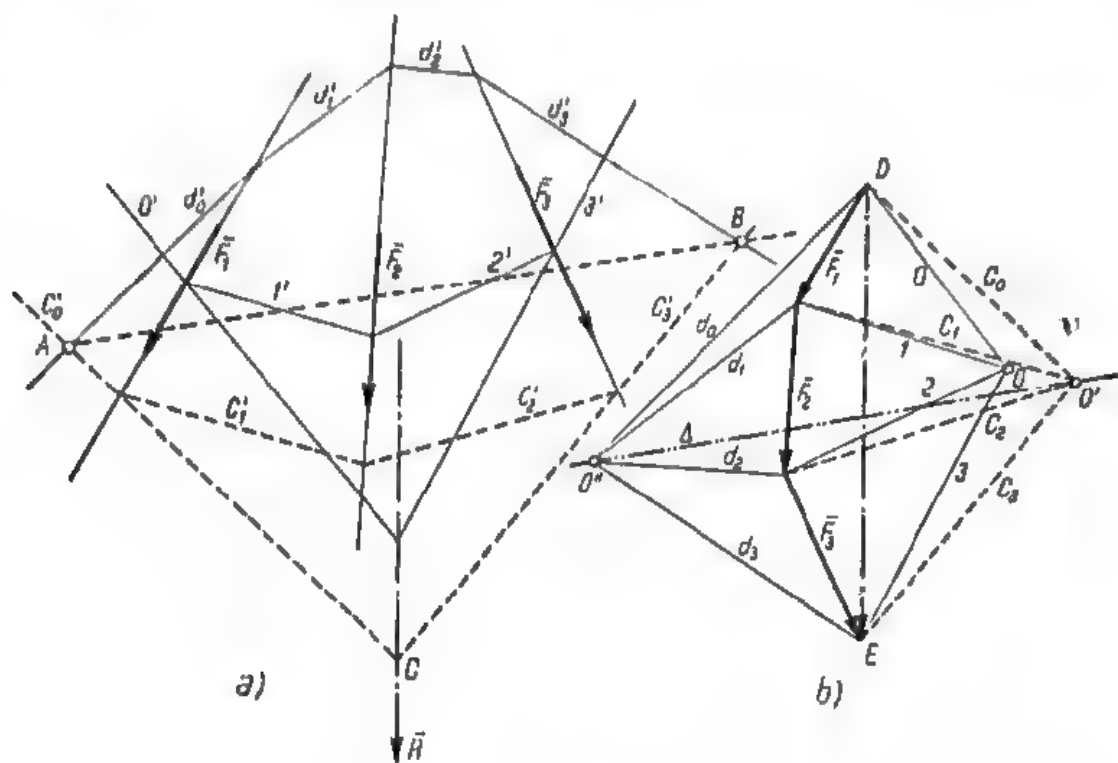


Fig. 10.9

trece prin A , ultima trece neapărat prin B . În fig. 10.9 sunt construite două asemenea poligoane funiculare: c'_0, c'_1, c'_2, c'_3 cu polul în O' și d'_0, d'_1, d'_2, d'_3 cu polul în O'' .

O altă construcție grafică pentru aceeași problemă este dată în fig. 10.10, unde pentru sistemul celor patru forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$, se cere ca a doua latură de poligon funicular (latura dintre \bar{F}_1 și \bar{F}_2) să treacă prin A , iar ultima latură să treacă prin B .

Cu un pol arbitrar O (fig. 10.10, b) se construiește un poligon funicular $1', 2', 3'$, astfel ca $1'$ să treacă prin A (latura $0'$ nu intervine în construcție). Evident, ultima latură $4'$ nu va trece în general prin B . Se duce prin A o dreaptă arbitrară AC care este intersectată de $4'$ în C , iar din polul O se duce paralela Δ' la AC . Ca urmare a teoremei demonstrate în paragraful precedent, pe dreapta AC se vor intersecta laturile omoloage ale poligoanelor funiculare cu polii pe paralela din O la AC , adică toate poligoanele funiculare cu polii pe această dreaptă se vor bucura de proprietatea că latura a doua — omologa lui $1'$ — va trece prin A și ultima — omologa lui $4'$ — va trece prin C . Ducând deci dreapta CB , am obținut un poligon care satisface problema, adică latura a doua trece prin A și ultima prin B .

Ducînd apoi, în poligonul forțelor (fig. 10.10, b), din extremitatea E a lui \bar{F}_4 paralela la CB , intersecția acesteia cu paralela din O la AC determină polul O' al poligonului care satisface problema. Dreapta Δ , paralela la AB din O' , conține toți polii poligoanelor funiculare care construite cu latura a doua prin A se bucură de proprietatea că ultima latură trece prin B .

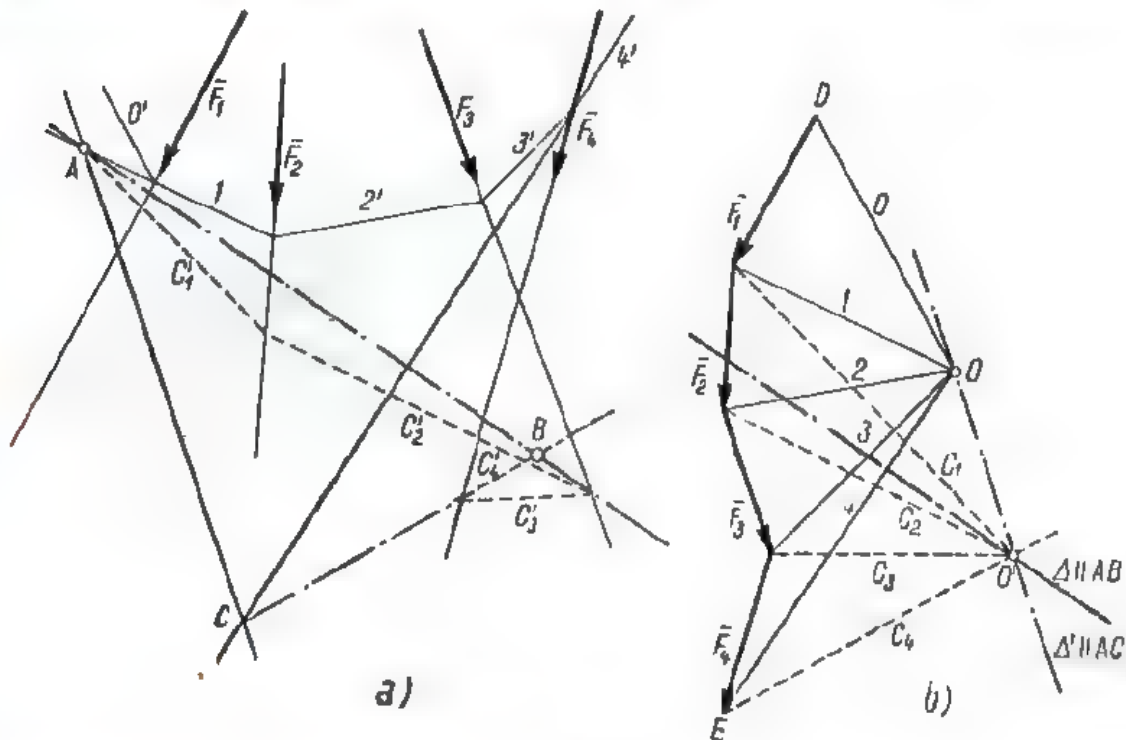


Fig. 10.10

În fig. 10.10 este construită una dintre soluții: poligonul funicular c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 corespunzător polului O' .

Observații. 1°. Din cele menționate se observă că la construirea poligonului funicular prin două puncte trebuie să se precizeze care laturi ale poligonului trebuie să treacă prin fiecare dintre puncte.

2°. În construcția din fig. 10.10, forța \bar{F}_1 nu a intervenit în rezolvarea problemei. Se generalizează ușor că în rezolvarea problemei intervine numai grupul de forțe cuprinse între laturile poligonului care au impuse condiții de a trece prin cele două puncte. Forțele exterioare acestui grup nu influențează soluția problemei.

3°. În rezolvarea practică a problemelor se poate alege oricare dintre soluțiile grafice reprezentate în fig. 10.9 și 10.10. În tehnică este întrebuințată mai mult soluția din fig. 10.9, care nu este aplicabilă însă în cazul cînd sistemul de forțe nu are o rezultantă (se reduce la un cuplu). Soluția din fig. 10.10 este însă aplicabilă și în acest caz.

§ 7. Poligon funicular care trece prin trei puncte date. Pentru un sistem de forțe dat, există un singur poligon funicular care trece prin trei puncte date. În adevăr, dacă pentru sistemul de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5$ din fig. 10.11, a, se cere ca prima latură să treacă prin A , latura a patra (între \bar{F}_3 și \bar{F}_4) să treacă prin C și ultima latură prin B , soluția se obține astfel: pentru grupul de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, ale cărui primă și ultimă latură de poligon funicular trebuie să treacă prin A , respectiv C , se obțin o infi-

nitare de soluții, dar toți polii acestor poligoane se găsesc pe o dreaptă determinată Δ_1 paralelă cu AC ; de asemenea, pentru grupul de forțe \bar{F}_4 și \bar{F}_5 , ale cărui primă și ultimă latură de poligon funicular trebuie să treacă prin C , respectiv B , se obține o infinitate de soluții cu polii pe o dreaptă Δ_2 paralelă cu CB . Cele două drepte se întâlnesc într-un punct O și poli-

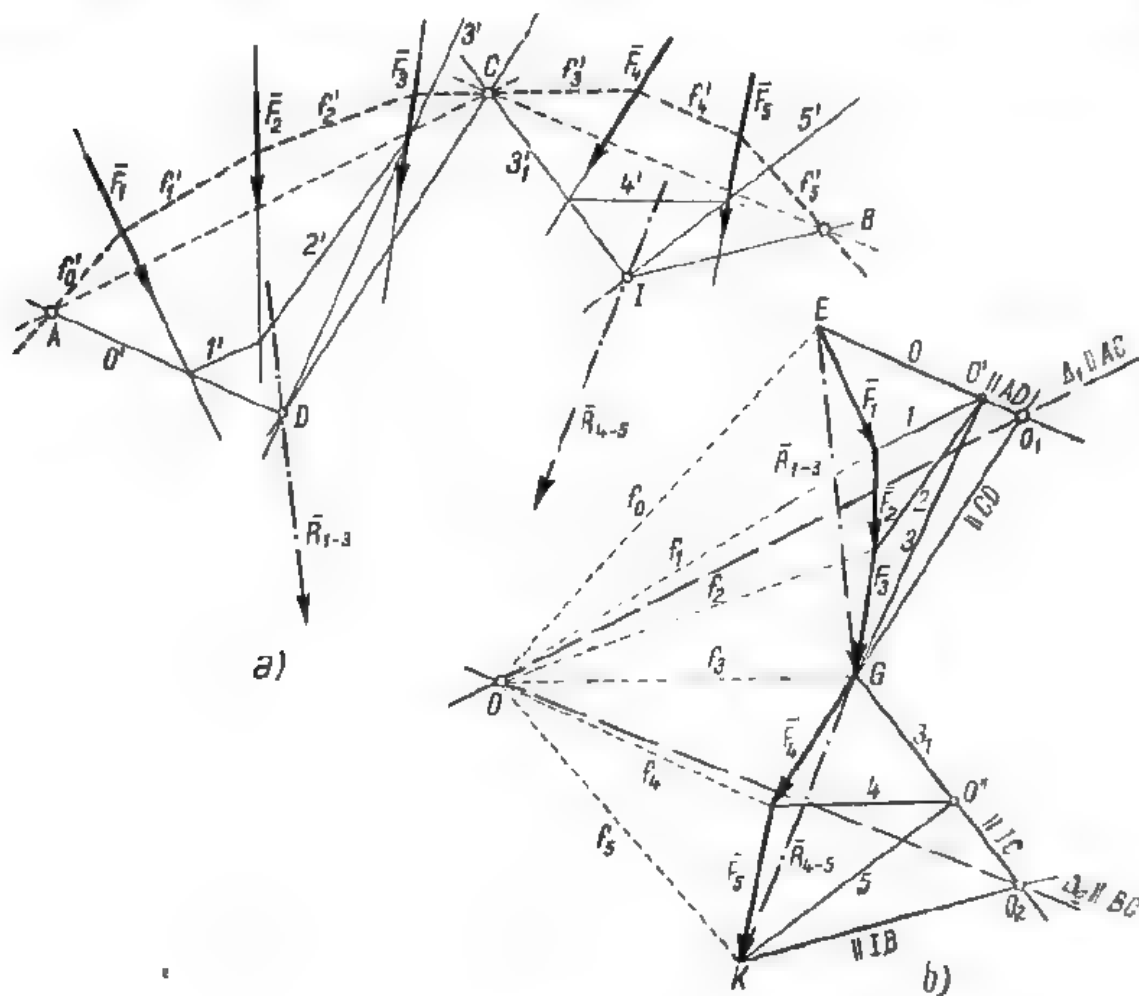


Fig. 10.11

gonul funicular cu polul în acest punct este singurul care satisface atât condițiile de pe dreapta Δ_1 cât și pe cele de pe dreapta Δ_2 ; adică poligonul funicular cu acest pol, început din A , este singurul poligon funicular care va trece și prin celelalte puncte C și B .

În poligonul forțelor (fig. 10.11, b) se determină rezultanta parțială R_{1-3} a forțelor \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 și apoi cu un pol arbitrar O' se construiește un poligon funicular $0'-1'-2'-3'$ ce determină punctul D al suportului rezultanței R_{1-3} . Un punct arbitrar de pe \bar{R}_{1-3} (pe fig. 10.11, a punctul D) se unește cu punctele A și C , iar în poligonul forțelor prin extremitățile E și G ale lui \bar{R}_{1-3} se duc paralele la DA și DC care se întâlnesc în O_1 . Prin O_1 se duc dreapta Δ_1 paralelă cu AC . Dreapta Δ_1 conține toți polii poligoanelor funculare care trec prin A și C .

Acceași operație se repetă pentru grupul de forțe F_4, \bar{F}_5 . În poligonul forțelor se construiește rezultanta \bar{R}_{4-5} și cu ajutorul unui pol arbitrar O'' și al unui poligon funicular se determină în fig. 10.11, *a*, punctul I de pe suportul lui \bar{R}_{4-5} . Se unește I cu C și B , apoi în poligonul forțelor din G și K se duc paralele la IC , respectiv IB , care se întâlnesc în O_2 . Dreapta Δ_2 care trece prin O_2 și este paralelă cu CB conține toți polii poligoanelor funiculare ce trec prin B și C .

Intersecția O a dreptelor Δ_1 și Δ_2 reprezintă polul poligonului funicular unic care, început din A va trece prin C și B . În fig. 10.11, *a* este reprezentat acest poligon $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$, unde f_0 a fost dus prin A , iar f_5 trece prin C și f_3 prin B .

Observații. 1°. Din această construcție grafică rezultă că pentru un sistem de forțe dat, un singur poligon funicular poate trece prin trei puncte A, B, C , deoarece dreptele $\Delta_1 \parallel AC$ și $\Delta_2 \parallel CB$ se întâlnesc într-un singur punct. Pentru aceasta trebuie ca dreptele Δ_1 și Δ_2 să nu fie paralele între ele, adică cele trei puncte A, C, B să nu fie în linie dreaptă. Deci, pentru a construi poligonul funicular unic care trece prin cele trei puncte A, C, B , este necesar ca cele trei puncte să nu fie în linie dreaptă.

2°. Dacă cele trei puncte A, B, C sînt în linie dreaptă, se pot întîmpla două cazuri: sau dreptele Δ_1 și Δ_2 sînt paralele și depărtate una de alta (punctul O se duce la infinit) și în acest caz nu se poate construi poligonul funicular care să satisfacă problema, sau cele două drepte Δ_1 și Δ_2 se suprapun (punctul O este un punct curent al celor două drepte suprapuse), adică, în acest caz avem o infinitate de poligoane funiculare care trec prin punctele A, C, B ale căror poli se găsesc pe o dreaptă paralelă cu ACB . Acest ultim caz este reprezentat în fig. 10.12 unde sînt construite două dintre poligoanele care satisfac problema ($\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_5$ cu polul O și $\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_5$ cu polul O').

3°. Dacă la determinarea celor două drepte Δ_1 și Δ_2 se întîmplă ca una sau ambele rezultante parțiale \bar{R}_{1-3} și R_{4-5} să lipsească, adică, unul sau ambele sisteme de forțe dintre AC și CB să fie echivalente cu cupluri, atunci cele două drepte Δ_1 și Δ_2 se determină cu ajutorul construcției grafice din fig. 10.10.

4°. Poligoanele funiculare care trec prin două sau trei puncte au numeroase aplicații în tehnică și în special la calculul grinzilor și arcelor. Din această cauză, pentru construirea poligonului funicular care trece prin trei puncte, există o serie de variante aplicabile în diferite cazuri speciale: cazul forțelor paralele, cazul cînd aceeași latură de poligon funicular trece prin două puncte etc. Toate aceste variante grafice, însă, se deduc din proprietățile și construcțiile descrise.

§ 8. Alte interpretări geometrice ale poligoanelor funiculare. Construcțiile grafice bazate pe poligonul funicular permit să se enunțe unele teoreme de geometrie care se demon-

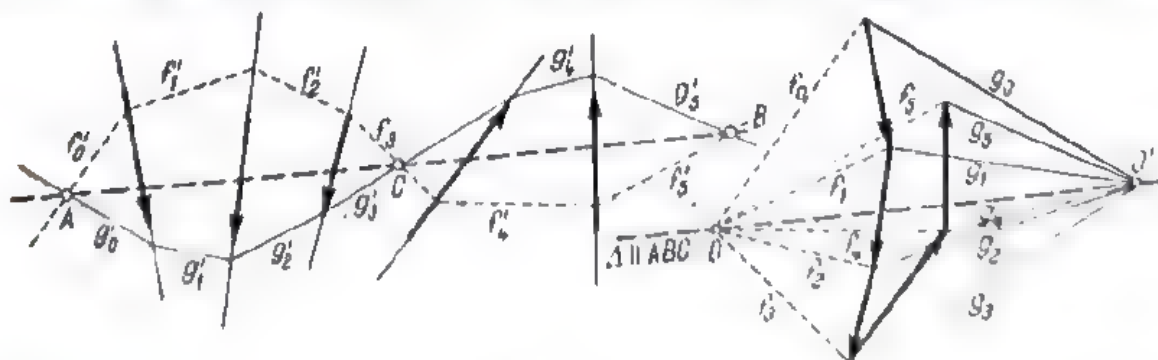


Fig. 10.12

strează pe altă cale în geometria proiectivă. De asemenea, invers, proprietățile poligoanelor funiculare pot fi deduse din teoreme de geometrie proiectivă. Aici vor fi enunțate numai două teoreme, care sînt folosite apoi în diferite construcții grafice ale staticii.

Astfel, din construirea rezultantei unui sistem de forțe cu ajutorul poligonului funicular (fig. 10.5) s-a văzut că pentru același pol O se pot obține o infinitate de poligoane funiculare, astfel încât toate au laturile omoloage paralele cu razele polare și deci paralele între ele. Punctele G, K, L, M ale tuturor acestor poligoane funiculare se deplasează pe forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$, iar punctul P pe dreapta care este suportul rezultantei.

Dacă se înlocuiește cuvîntul forță prin dreaptă și se elimină cuvîntul funicular, se poate enunța următoarea teoremă: dacă un poligon cu n vîrfuri se deformează astfel ca laturile sale să rămîină paralele cu niște direcții date, iar $n-1$ vîrfuri descriu niște drepte, atunci și al n -lea vîrf descrie o dreaptă.

De aici rezultă și reciprocă: dacă un poligon cu n laturi se deformează astfel că toate vîrfurile sale descriu niște drepte, iar $n-1$ laturi rămîin paralele cu niște direcții date atunci și a n -a latură va rămîine paralelă cu o direcție fixă.

Din proprietatea că laturile omoloage a două poligoane funiculare se întîlnesc în puncte coliniare, așa cum s-a arătat în fig. 10.8, se poate enunța teorema:

Dacă un poligon cu n laturi se deformează astfel încît toate vîrfurile sale descriu anumite drepte date, iar $n-1$ laturi se rotesc în jurul a $n-1$ puncte fixe situate pe o dreaptă, atunci și latura a n -a se va roti în jurul unui punct fix situat pe dreapta celor $n-1$ puncte.

De aici se poate deduce și reciprocă: dacă un poligon cu n vîrfuri se deformează astfel încît toate laturile sale trec prin niște puncte fixe situate pe o dreaptă, iar $n-1$ vîrfuri descriu $n-1$ drepte date, atunci și al n -lea vîrf va descrie o dreaptă.

§ 9. Descompunerea unei forțe după trei suporturi neconcurente în plan. Fie forța \bar{R} care trebuie descompusă după suporturile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ neconcurente și în același plan cu \bar{R} (fig. 10.13, a). Intersecția lui \bar{R} cu unul dintre cele trei suporturi, de exemplu cu Δ_3 , este punctul A , iar intersecția celorlalte două suporturi este B . Se descompune în A forța \bar{R} după direcția suportului Δ_3 și după direcția AB cu ajutorul paralelogramului, obținîndu-se \bar{F}_3 pe suportul Δ_3 și \bar{R}_{1-2} pe suportul AB . Apoi în B se descompune forța \bar{R}_{1-2} după direcțiile Δ_1 și Δ_2 cu ajutorul paralelogramului și se obține \bar{F}_1 pe suportul lui Δ_1 și \bar{F}_2 pe suportul Δ_2 . Pentru claritate, în fig. 10.13, a, se determină de obicei numai dreapta AB , iar descompunerea propriu-zisă se face pe o figură separată (fig. 10.13, b), unde se desenează forța \bar{R} , din extremitățile ei D și C se duc paralele la Δ_3 și AB , obținîndu-se \bar{F}_3 și \bar{R}_{1-2} , iar apoi din extremitățile C și E ale lui \bar{R}_{1-2} se duc paralele

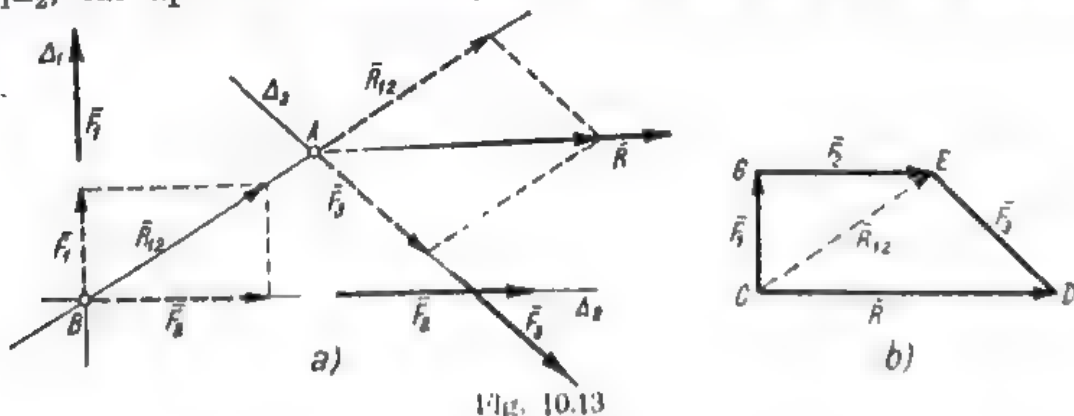


Fig. 10.13

la Δ_2 și Δ_1 obținîndu-se astfel \bar{F}_2 și \bar{F}_1 . Sensul forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ se obține parcurgînd în același sens poligonul (CED) , din originea C , spre extremitatea D a lui \bar{R} .

Evident suporturile forțelor \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 sînt dreptele Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 din fig. 10.13, a.

Soluția este unică. Dacă cele trei drepte Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 erau concurente, dar punctul lor de concurență nu se găsea pe forța \bar{R} , problema era imposibil de rezolvat. Dacă cele trei drepte Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 erau concurente pe forța \bar{R} sau paralele și în același plan, problema era nedeterminată. Dacă s-ar fi cerut să se descompună forța \bar{R} după patru sau mai multe direcții din același plan și neconcurente, problema era nedeterminată.

Soluția indicată în fig. 10.13 este aplicabilă în cazul cînd punctele de intersecție A și B intră în cadrul desenului. Dacă intersecțiile nu intră în cadrul desenului, se face uz de proprietățile poligoanelor funiculare așa cum se arată în fig. 10.14, unde forța \bar{R} , după suportul Δ , urmează a fi descompusă după suporturile Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 . Se admite după direcția Δ_1 , o componentă \bar{F}'_1 oarecare și atunci în poligonul forțelor (fig. 10.14, b) se determină celelalte componente \bar{F}'_2 și \bar{F}'_3 care acționează pe Δ_2 și Δ_3 . Dintr-un pol O se duc raze polare \bar{f}_0 , \bar{f}_1 , \bar{f}_2 , \bar{f}_3 (fig. 10.14, b), iar dintr-un punct C de pe forța \bar{R} (fig. 10.14, a) se duc laturile \bar{f}'_0 , paralelă cu \bar{f}_0 , și \bar{f}'_3 , paralelă cu \bar{f}_3 , apoi se duc laturile: \bar{f}'_1 paralelă cu \bar{f}_1 și, din intersecția acesteia cu Δ_2 , \bar{f}'_2 paralelă cu \bar{f}_2 . Evident \bar{f}'_2 nu se întâlnește cu \bar{f}'_3 pe Δ_3 , adică valoarea arbitrară pentru \bar{F}'_1 nu e cea justă. Se ia atunci o a doua valoare

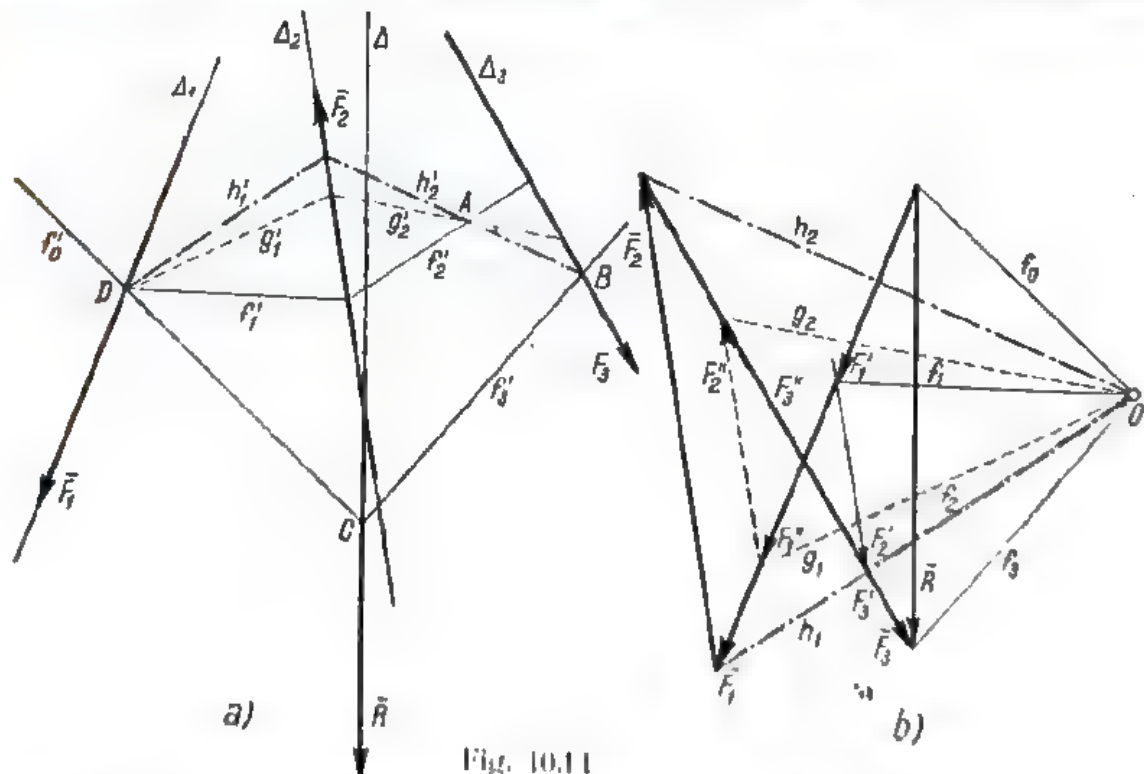


Fig. 10.11

arbitrară F'_1 de unde rezultă în poligonul forțelor (fig. 10.14, b) F'_2 și F'_3 și raze polare f_0 , f_1 , f_2 , f_3 . Se duc apoi în fig. 10.14, a laturile de poligon funicular g'_1 și g'_2 în loc de f'_1 și f'_2 . Desigur că nici g'_2 nu se va întâlni cu

\bar{f}_3 pe Δ_3 deci nici valoarea arbitrară \bar{F}_1^* nu e soluția justă. Dacă ne ocupăm acum de poligonul $\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2$, observăm că prin înlocuirea lui \bar{F}_1^* cu \bar{F}_1^* , acesta a devenit poligonul $\bar{f}_1, \bar{g}_1, \bar{g}_2$, adică latura \bar{f}_0 rămâne pe loc, latura \bar{f}_1 — respectiv \bar{g}_1 — trec amîndouă prin punctul fix D , iar vîrfurile poligonului se deplasează pe două drepte date Δ_1 și Δ_2 (în cazul de față vîrfurile D de pe Δ_1 stă pe loc).

Conform teoremei stabilite rezultă că și a treia latură a poligonului \bar{f}_2 — respectiv \bar{g}_2 — va trece printr-un punct fix. Acest punct va fi chiar punctul A , unde se întîlnesc cele două laturi \bar{f}_2 și \bar{g}_2 . Deci aceste valori arbitrare luate pentru \bar{F}_1 dau laturi de poligon funicular între Δ_2 și Δ_3 ce trec prin A . Adevărata latură va trebui să se întîlnească cu \bar{f}_3 pe Δ_3 . Dar, intersecția lui Δ_3 cu \bar{f}_3 este cunoscută și este notată cu B . Deci dreapta AB va fi adevărata latură de poligon funicular. În figură este notată cu \bar{h}_2 și apoi se deduce și \bar{h}_1 . Ducînd paralele din O la \bar{h}_2 și \bar{h}_1 se obține \bar{h}_2 și \bar{h}_1 și apoi adevăratele valori ale forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, pe suporturile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Pentru verificare trebuie ca dreapta care trece prin intersecția lui \bar{F}_1 cu \bar{h}_1 și a lui \bar{F}_3 cu \bar{h}_2 să fie paralelă cu Δ_2 .

Observație. Dacă în locul forței \bar{R} , ar fi acționat asupra solidului un sistem oarecare de forțe în același plan, care ar fi trebuit să fie înlocuit printr-un sistem echivalent de trei forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ care să acționeze după trei drepte $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, neconcurente și în același plan cu sistemul, se determină în prealabil rezultanta \bar{R} a sistemului de forțe și apoi se procedează la descompunerea grafică. Dacă sistemul de forțe care acționează asupra solidului nu se reduce la o rezultantă, ci la un cuplu, atunci operația grafică de descompunere se aplică asupra fiecăreia dintre forțele cuplului.

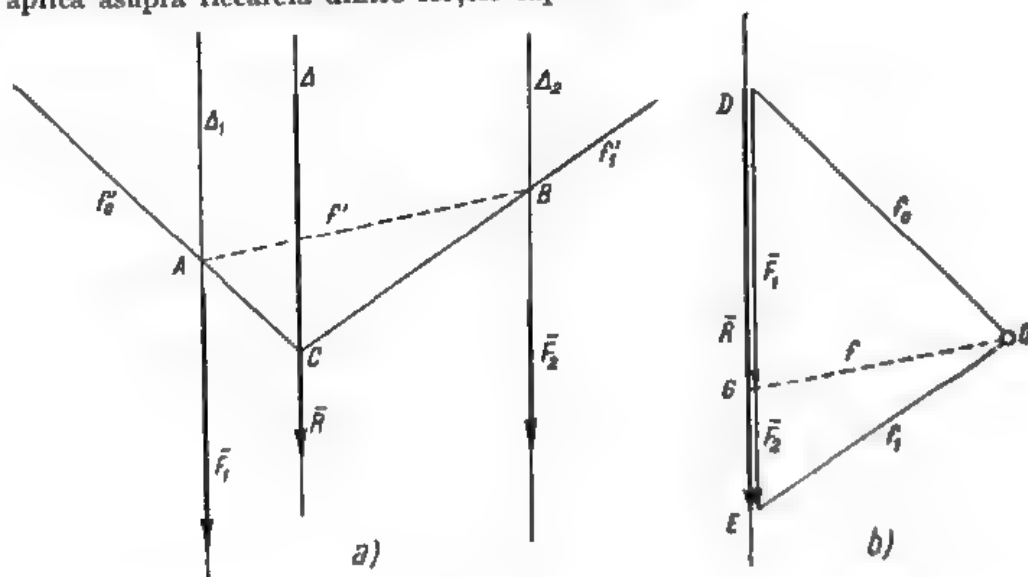


Fig. 10.15

§ 10. Descompunerea unei forțe după două suporturi paralele cu ea în plan. Cu ajutorul poligonului funicular se poate descompune o forță \bar{R} după două suporturi Δ_1 și Δ_2 paralele cu ea (fig. 10.15).

Dintr-un punct oarecare C al forței \bar{R} se duc două drepte oarecare CA și CB pînă intersectează dreptele Δ_1 și Δ_2 (fig. 10.15, *a*). Apoi în poligonul forțelor (fig. 10.15, *b*) din extremitățile D și E ale lui \bar{R} se duc paralele la AC și BC , care se întîlnesc în O . Din O se duce paralela la AB

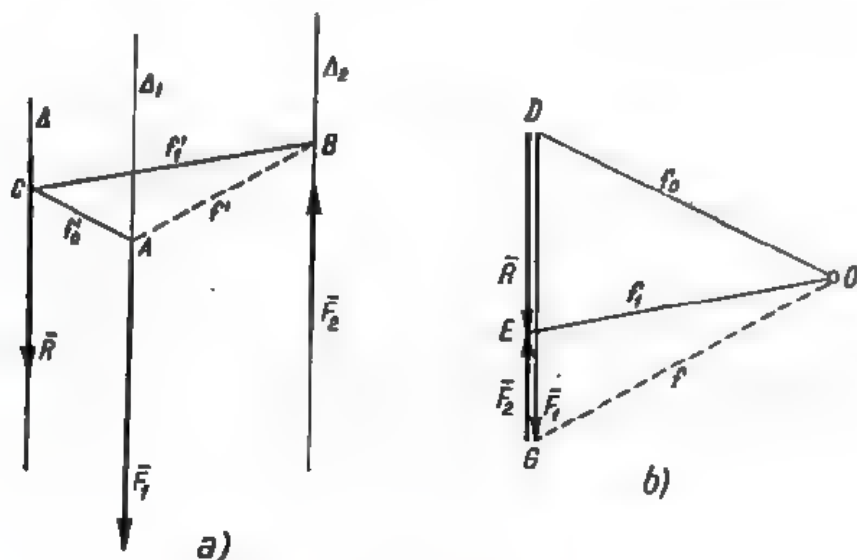


Fig. 10.16

care întîlnește pe DE în G . DG și DE reprezintă cele două componente \bar{F}_1 și \bar{F}_2 . Pentru a stabili care este \bar{F}_1 și care \bar{F}_2 se ține seama de reciprocitatea figurilor *a* și *b*. În fig. 10.15, *a*, Δ_1 , AC și AB sînt concurente în A pe Δ_1 . Deci paralelele lor, în fig. 10.15, *b*, trebuie să formeze un triunghi închis, care este triunghiul DOG . Deci, DG este componenta \bar{F}_1 de pe suportul Δ_1 . Analog se procedează pentru \bar{F}_2 .

În fig. 10.16 este arătată descompunerea forței \bar{R} , după suporturile Δ_1 și Δ_2 de aceeași parte a lui \bar{R} . Așa cum rezultă din poligonul forțelor, componentele \bar{F}_1 și \bar{F}_2 sînt de sensuri contrare. Forța F_1 , mai apropiată de \bar{R} are sensul lui \bar{R} și este mai mare decît \bar{R} , iar forța F_2 , mai depărtată de \bar{R} , are sens contrar lui \bar{R} .

§ 11. Momentul unui sistem de forțe determinat pe cale grafică. Poligonul funicular permite să se determine valoarea momentului unui sistem de forțe din același plan în raport cu un punct oarecare din planul forțelor.

Fie forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$, din fig. 10.17, *a*. În fig. 10.17, *b* se construiește poligonul forțelor, apoi dintr-un pol arbitrar se duc raze polare $0, 1, 2, 3, 4$ și se construiește un poligon funicular $0', 1', 2', 3', 4'$ corespunzător polului O . Valoarea absolută a momentului forțelor F_1, F_2, F_3 în raport cu punctul A este egală cu produsul dintre rezultanta R_{1-3} a forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ și distanța d de la punctul A la rezultanta R_{1-3} , care trece prin intersecția D a laturilor $0'$ și $3'$. Deci $M_1(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) = R_{1-3} \cdot d$.

Dacă prin punctul A se duce paralela la \bar{R}_{1-3} se formează triunghiul DCE (fig. 10.17, a) care este asemenea cu triunghiul $OC'E'$ din fig. 10.17, b , datorită paralelismului laturilor. Se notează segmentul CE cu m , iar în poligonul forțelor distanța de la O la $C'E'$ se notează cu H . H poartă nu-

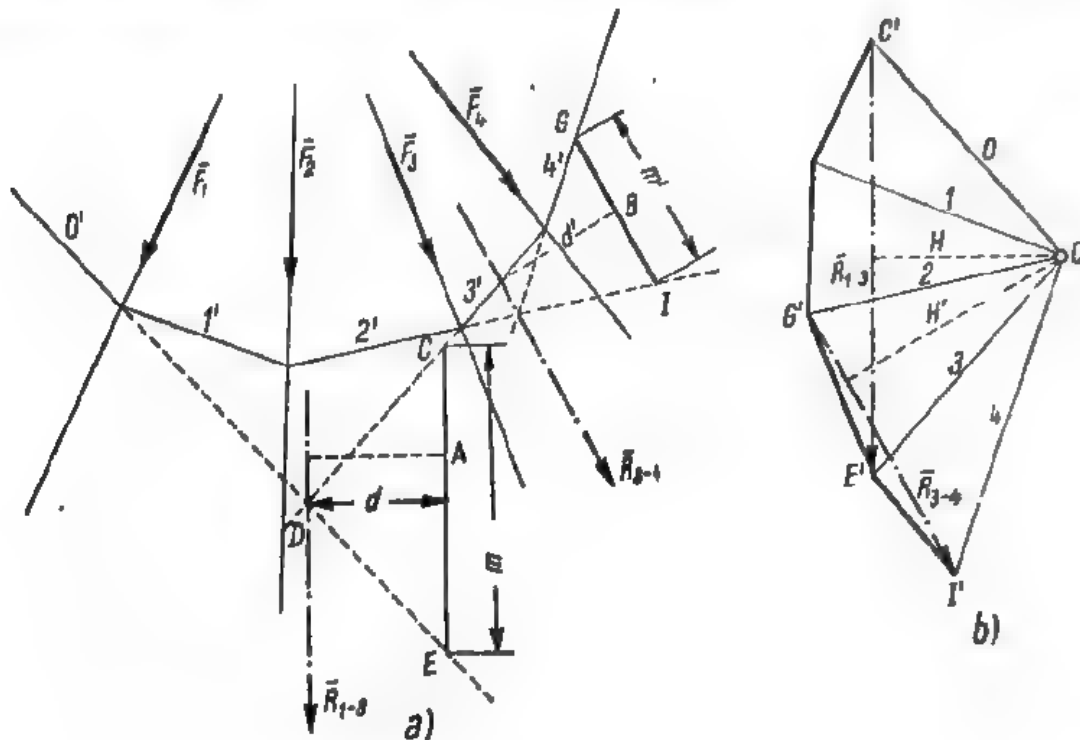


Fig. 10.17

mele de distanța polară a grupului de forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, deoarece este distanța de la polul O la \bar{R}_{1-3} din poligonul forțelor.

Exprimind proporționalitatea dintre bazele $CE=m$ și $C'E'=R_{1-3}$ și înălțimile corespunzătoare d și H din triunghiurile asemenea DCE și $OC'E'$ rezultă

$$\frac{m}{R_{1-3}} = \frac{d}{H}, \text{ de unde } R_{1-3}d = mH.$$

Deci

$$|\mathcal{M}_A(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)| = R_{1-3}d = mH.$$

Relația $|\mathcal{M}_A(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)| = mH$ arată că: valoarea momentului unui sistem de forțe în plan în raport cu un punct A din acel plan este egală cu produsul dintre segmentul m care trece prin punctul A și este paralel cu rezultanta sistemului de forțe, interceptat între prima și ultima latură de poligon funicular al sistemului de forțe considerat și distanța polară H a acestui sistem de forțe, dedusă cu ajutorul polului care a servit la construcția poligonului funicular.

De ex., momentul grupului de forțe F_3 și \bar{F}_4 din fig. 10.17, a în raport cu punctul B este: $|\mathcal{M}_B(\bar{F}_3, \bar{F}_4)| = m'H'$.

Se vede că trecînd de la un punct la altul și schimbînd și grupul de forțe, se modifică în general atît segmentul m cît și distanța polară H , la fel ca și în expresia directă Rd .

Interpretarea de mai sus are însă avantaje în cazul forțelor paralele în același plan (care este un caz cu multe aplicații tehnice), așa cum se

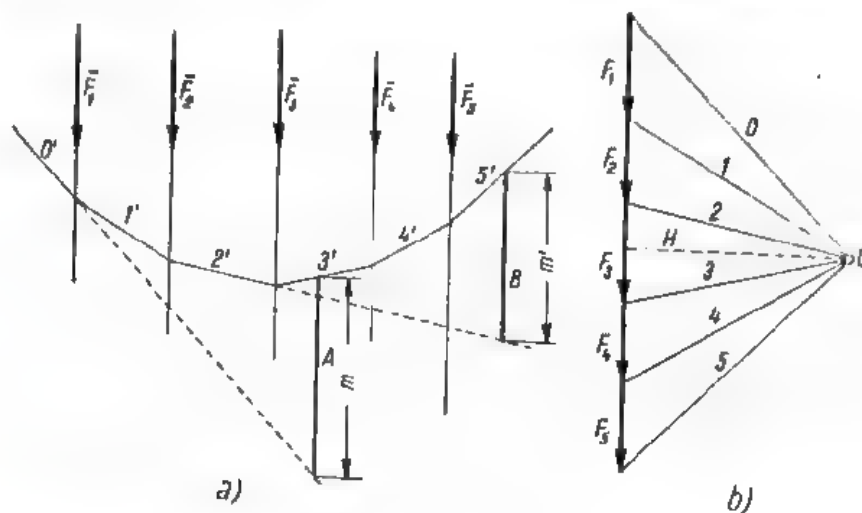


Fig. 10.18

vede în fig. 10.18, deoarece poligonul forțelor este alcătuit dintr-o singură dreaptă, așa că distanța polară H este aceeași pentru orice grup de forțe. În acest caz, toate segmentele m sînt paralele cu direcția comună a forțelor paralele.

Din fig. 10.18 rezultă:

$$\mathcal{M}_A(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) = mH; \quad \mathcal{M}_B(\bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5) = m'H.$$

În aceste expresii, H este același și numai m variază, ceea ce permite ca din compararea directă a segmentelor m să se deducă variația momentelor forțelor paralele.

Scări. Rezultatele construcțiilor grafice trebuie interpretate prin cifre care să reprezinte mărimile diferitelor elemente. Aceasta se face cu ajutorul scărilor.

Astfel se alege o scară pentru lungimi: 1 cm de pe desen reprezintă a unități de lungime din natură, de exemplu, a metri. Apoi 1 cm de pe desen reprezintă f unități de forță din natură, de exemplu f tone-forță.

Pentru momente, scara rezultă din expresia $\mathcal{M} = mH$, unde distanța polară H poate fi măsurată la scara forțelor, iar segmentul m la scara lungimilor sau invers.

Pentru cazul forțelor paralele, unde H rămîne constant, se poate deduce și o scară a momentelor, care să evite efectuarea produsului mH la evaluarea fiecărui moment. Pentru aceasta se observă că cele spuse se pot scrie astfel:

$$\mathcal{M} = (ma) \text{ m } (Hf) \text{ tf} = m(aH) \text{ tf} \cdot \text{m}.$$

Accasta înseamnă că un centimetru de pe segmentul m din desen reprezintă a/H tf·m în natură, ceea ce constituie chiar scara momentelor. Astfel, dacă un centimetru de pe epură reprezintă 5 m din natură ($a=5$ m) și 1 cm de pe epură reprezintă 4 tf ($f=4$ tf), iar distanța polară este 6 cm ($H=6$ cm), atunci 1 cm de pe segmentul m reprezintă $a/H=6 \cdot 4 \cdot 5=120$ tf·m.

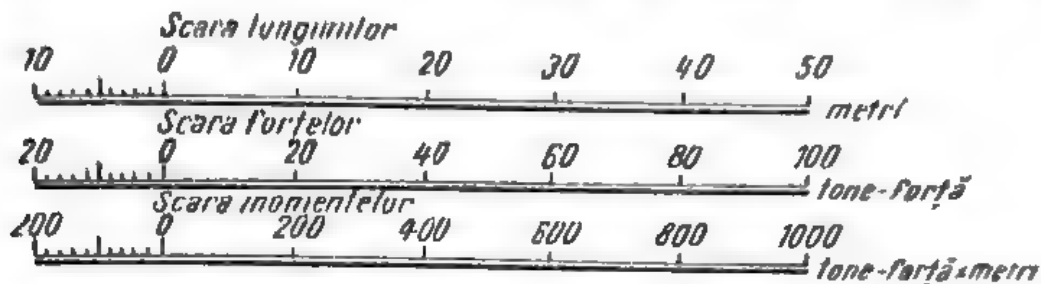


Fig. 10.19

De obicei scara pentru lungimi, forțe și momente, se reprezintă grafic pe desen ca în fig. 10.19.

C. DETERMINAREA GRAFICĂ A REACȚIUNILOR

§ 12. **Generalități.** Construcțiile grafice analizate pot fi folosite și pentru determinarea reacțiunilor unui solid supus la un sistem de forțe în același plan și cu legături în planul forțelor. În acest caz, pentru fixarea solidului, sînt necesare și suficiente trei legături simple care pot fi: o articulație și un reazem simplu a cărei dreaptă de suport să nu treacă prin articulație, trei reazeme simple ale căror suporturi să nu fie concurente sau paralele, o încastrare. Mai departe se dau unele cazuri curențe de determinare grafică a reacțiunilor.

§ 13. **O articulație și un reazem simplu.** Din punct de vedere al construcției grafice se pot ivi diferite cazuri.

a) *Solidul este acționat de forțe paralele cu suportul reacțiunii din reazemul simplu.* În acest caz din condițiile de echilibru rezultă că reacțiunea din articulație este și ea paralelă cu forțele și reacțiunea din reazemul simplu, deci sînt cunoscute suporturile ambelor reacțiuni.

În fig. 10.20, a, solidul articulat în A și simplu rezemat în B este acționat de forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ paralele cu suportul reacțiunii \bar{V}_B din reazemul simplu B . Reacțiunea \bar{V}_A din A este de asemenea paralelă cu forțele \bar{F} și cu \bar{V}_B . Deci, sistemul de forțe paralele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{V}_A$ și \bar{V}_B trebuie să fie în echilibru, adică pe cale grafică, poligonul forțelor și poligonul funicular trebuie să fie poligoane închise. Se construiește poligonul forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ (fig. 10.20, b), se duc razele polare 0, 1, 2, 3 dintr-un pol arbitrar O și se construiește poligonul funicular 0', 1', 2', 3'. Fie A' intersecția lui 0' cu suportul lui \bar{V}_A și B' intersecția lui 3' cu suportul lui \bar{V}_B . Prin A' trebuie să treacă latura de poligon funicular din stînga lui \bar{V}_A , iar prin B'

latura de poligon din dreapta lui \bar{V}_B . Acestea vor fi prima, respectiv ultima latură de poligon funicular al sistemului de forțe în echilibru $\bar{V}_A, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{V}_B$. Dar aceste laturi trebuie să se suprapună (poligonul funicular închis); deci

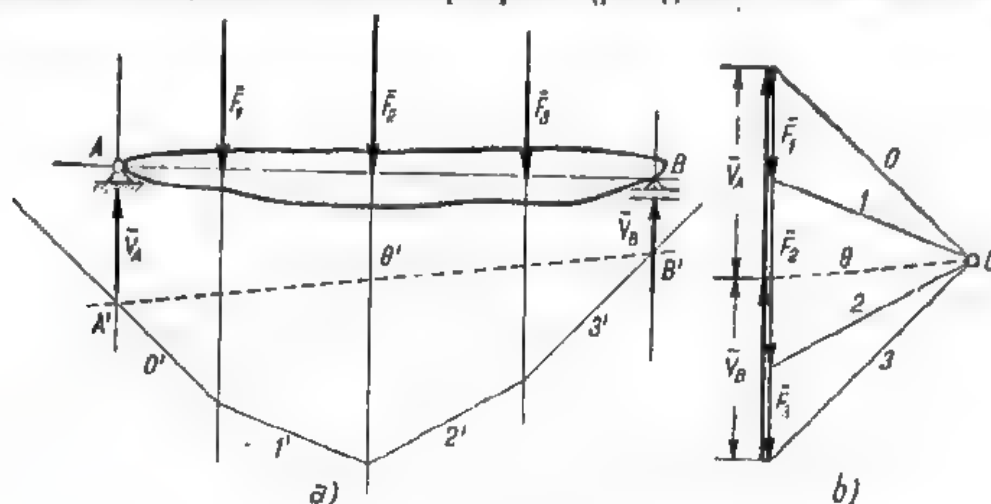


Fig. 10.20

dreapta $A'B'$ va fi prima și ultima latură a poligonului funicular închis. Aceasta este notată cu $\bar{\theta}'$ și poartă numele de latură de închidere a poligonului funicular. Din polul O se duce raza polară $\bar{\theta}$ paralelă cu $\bar{\theta}'$ și se determină astfel cele două reacțiuni \bar{V}_A și \bar{V}_B care închid poligonul forțelor. În fig. 10.20, a , $\bar{V}_A, \bar{\theta}'$ și $\bar{\theta}$ sînt concurente, deci în fig. 10.20, b , $\bar{V}_A, \bar{\theta}$ și $\bar{\theta}'$ trebuie să formeze un triunghi închis. Astfel, se determină care dintre reacțiuni este \bar{V}_A .

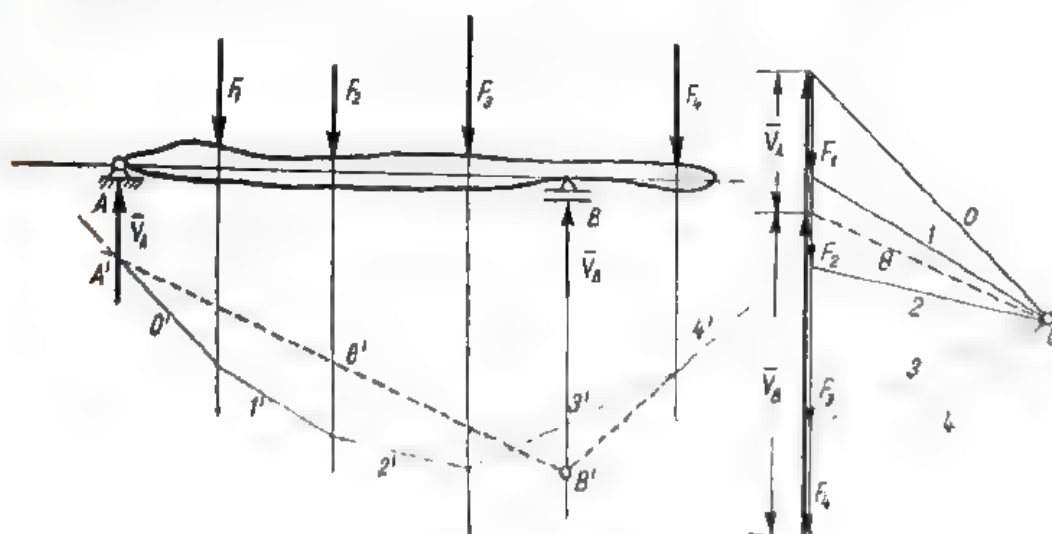


Fig. 10.21

Dacă forțele acționează și în afara intervalului dintre reazeme, ca în fig. 10.21, unde F_4 este în dreapta lui B , trebuie să se observe că linia de închidere $\bar{\theta}'$ trece prin A' și B' , unde B' este intersecția suportului lui \bar{V}_B cu latura $4'$ din dreapta lui \bar{F}_4 .

Observație. Aceeași construcție grafică se obține dacă se determină mai întâi rezultanta forțelor care acționează solidul și apoi se descompune această rezultantă după suporturile reacțiunilor din A și B . Cele două componente cu semn schimbat sînt reacțiunile V_A și V_B .

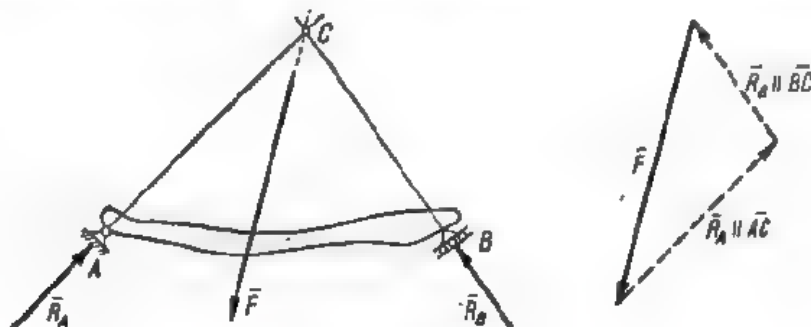


Fig. 10.22

b) *Solidul este acționat de forțe de direcții arbitrare.* Cazul cel mai simplu îl constituie acela în care solidul este acționat de o singură forță \vec{F} (fig. 10.22, a). În acest caz, suportul reacțiunii din reazemul simplu B fiind cunoscut, se determină punctul C unde \vec{R}_B întâlnește pe \vec{F} . Pentru echilibru trebuie ca reacțiunea \vec{R}_A din articulația A să treacă și ea prin C . Deci, AC este suportul reacțiunii din A . Reacțiunile \vec{R}_A și \vec{R}_B se obțin din închiderea poligonului forțelor (fig. 10.22, b).

Dacă solidul este acționat de mai multe forțe, se poate afla rezultanta forțelor și apoi se procedează ca în fig. 10.22. În cazul când punctul C nu intră în cadrul desenului, se procedează așa cum se arată în fig. 10.23. Con-

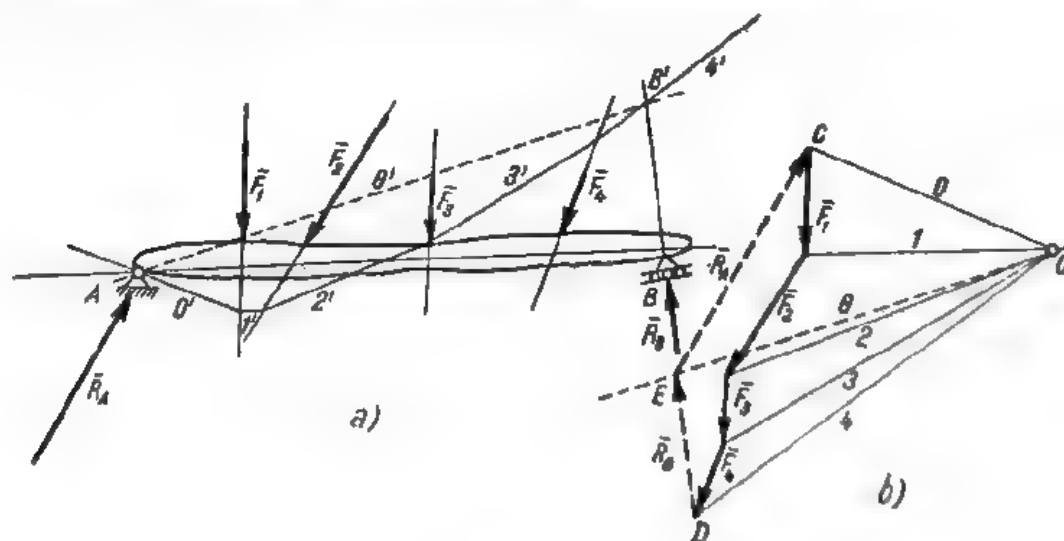


Fig. 10.23

dițiile de echilibru grafic sînt: poligonul forțelor închis și poligonul funicular închis. Se cunosc suporturile forțelor date și ale reacțiunii \vec{R}_B din reazemul simplu B . Nu se cunoaște însă suportul lui \vec{R}_A din articulația A . În orice caz, A este un punct al acestui suport, de aceea poligonul

funicular corespunzător polului arbitrar O din fig. 10.23, b se începe astfel ca latura O' să treacă prin A . Punctul A este deci un punct al liniei de închidere a poligonului funicular, iar punctul B' unde latura $4'$ întâlnește suportul cunoscut al reacțiunii din B , este al doilea. Dreapta AB' este linia \bar{O}' de închidere a poligonului funicular. Din polul O se duce \bar{O} paralelă cu \bar{O}' , iar din D (extremitatea lui \bar{F}_4) se duce paralela la \bar{R}_B . Se determină astfel punctul E .

În fig. 10.23, a , \bar{R}_B , \bar{O}' și $4'$ sînt concurente, deci în fig. 10.23, b ele trebuie să formeze un triunghi ODE . Deci, DE este \bar{R}_B . Pentru a închide și poligonul forțelor, se unește E cu C care va determina pe \bar{R}_A . Semnele lui \bar{R}_B și \bar{R}_A se deduc parcurgînd poligonul forțelor $CDEC$ în același sens.

§ 14. **Trei reazeme simple.** Suporturile reacțiunilor din cele trei reazeme nu sînt concurente sau paralele. În acest caz, problema este posibilă și static determinată. Dacă solidul este acționat de o forță \bar{F} , problema revine la a descompune o forță după trei suporturi neconcurente în plan, așa cum a fost arătat, în fig. 10.13 și 10.14. În fig. 10.24, a , solidul acționat de forța \bar{F} este simplu rezemat în A , B și C . Punctul D este intersecția suporturilor reacțiunilor din A și C , iar punctul E este intersecția lui \bar{F} cu suportul reacțiunii din B . În fig. 10.24, b din extremitățile lui \bar{F} se duc: paralela la \bar{R}_B și $D'E'$, paralelă cu DE , apoi din extremitățile lui $D'E'$ paralele la suporturile reacțiunilor din C și A . Parcurgînd în același sens poligonul forțelor din fig. 10.24, b se determină sensurile reacțiunilor R_A , R_C , R_B .

Dacă solidul este acționat de mai multe forțe, se construiește întîi rezultanta lor și apoi se aplică construcția din fig. 10.24. Dacă solidul este acționat de un cuplu, se repetă construcția din fig. 10.24 pentru fiecare dintre forțele cuplului.

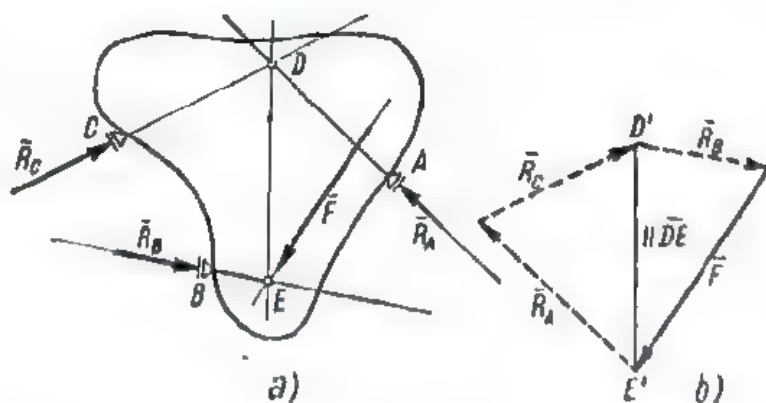


Fig. 10.24

§ 15. **Determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele plane (sistem articulat) pe cale grafică (metoda Maxwell-Cremona).** Metoda cea mai întrebuintată este metoda separării nodurilor, cunoscută sub numele de metoda poligoanelor reciproce, sau metoda Maxwell-Cremona și constituie o aplicație a condițiilor de echilibru a forțelor concurente pe cale grafică.

Izolind un nod al sistemului articulată, forța exterioară din nod și eforturile din barele care pleacă din acest nod alcătuiesc un sistem de forțe concurente în echilibru. Aceasta înseamnă că poligonul de forțe corespunzător acestui nod trebuie să fie un poligon închis. Direcțiile tuturor forțelor

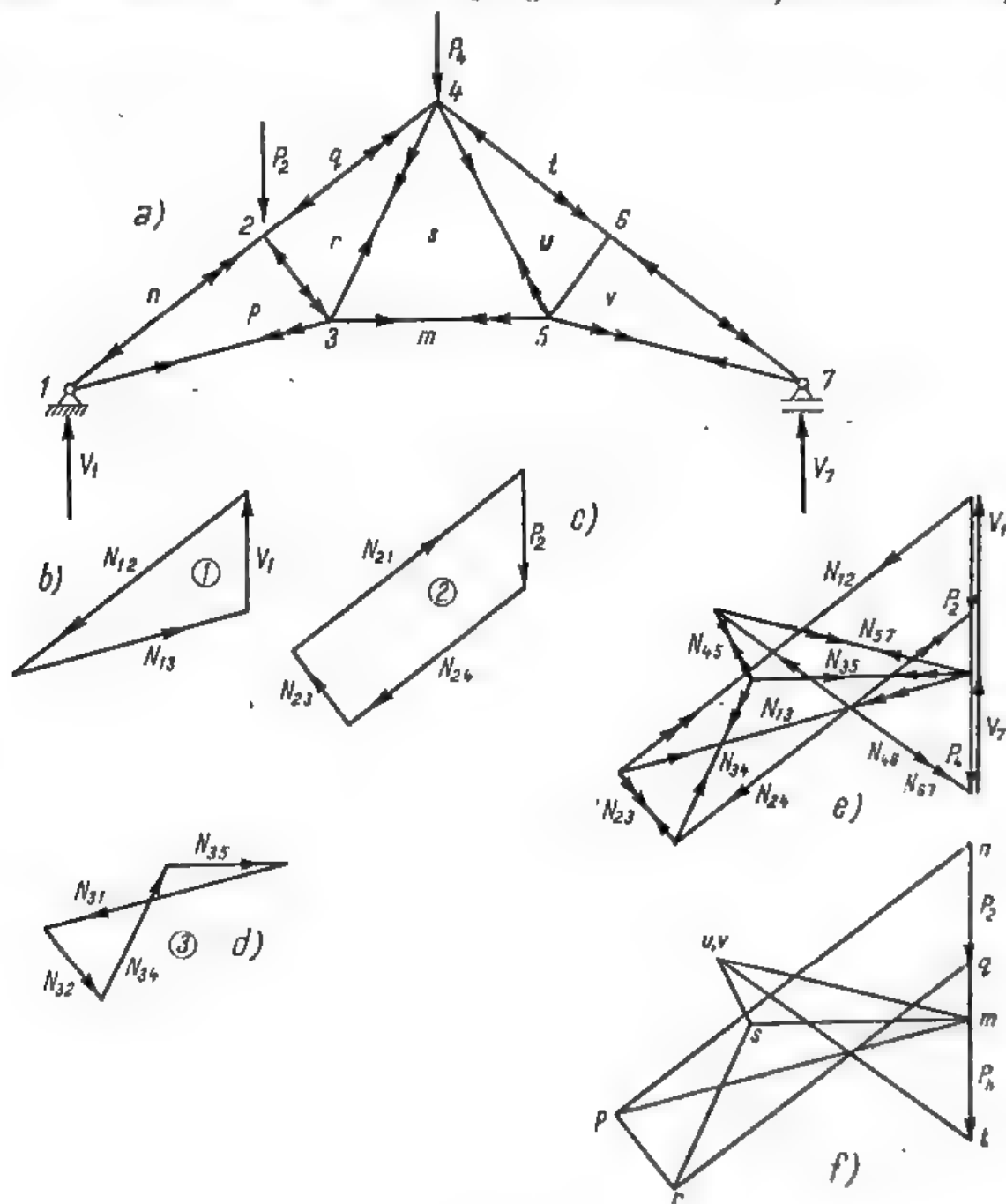


Fig. 10.25

fiind cunoscute, înseamnă că în nodul respectiv pot fi determinate prin închiderea poligonului de forțe numai două eforturi necunoscute. Deci, separarea nodurilor începe de la un nod în care sînt numai două eforturi necunoscute și apoi se caută succesiv noduri în care să apară numai cîte două necunoscute.

Grinda cu zăbrele (ferma) din fig. 10.25 nu are, la prima vedere, nici un nod cu numai două necunoscute, dar ea, în ansamblu fiind un solid geometric nedeformabil, permite să se determine reacțiunile \bar{V}_1 și \bar{V}_7 din echilibrul general, fie pe cale analitică fie pe cale grafică cu ajutorul unui poligon de forțe și a unui poligon funicular, așa cum s-a arătat anterior. Construcția grafică pentru determinarea reacțiunilor \bar{V}_1 și \bar{V}_7 nu a mai fost reprodusă în fig. 10.25. Operația de separare a nodurilor poate începe fie de la nodul 1 fie de la nodul 7. Obişnuit se începe de la nodul 1.

V_1 fiind cunoscut se exprimă că nodul 1 este în echilibru sub acțiunea lui V_1 , N_{1-2} și N_{1-3} . Se construiește deci triunghiul forțelor din fig. 10.25, *b*, iar semnele lui N_{1-2} și N_{1-3} sînt determinate din condiția de închidere a triunghiului forțelor. S-au determinat astfel eforturile în barele nodului 1. Se vede că efortul N_{1-2} , în nodul 1 apasă pe nod, deci este o compresiune, pe cînd N_{1-3} trage de nod, deci este o întindere. Se pun săgețile respective pe fig. 10.25, *a*.

Totodată efortul de compresiune din bara 1—2 apasă și în nodul 2, iar cel de întindere din bara 1—3 trage și de nodul 3 și se pun săgețile corespunzătoare în nodurile 2 și 3.

Acum se poate trece la echilibrul nodului 2 căci, ținînd seama că N_{2-1} este cunoscut, rămîn necunoscute numai N_{2-4} și N_{2-3} .

În fig. 10.25, *c*, este reprezentat poligonul închis al forțelor nodului 2. S-au determinat astfel eforturile în bara 2—4 (compresiune) și 2—3 (compresiune).

Vedem acum că se poate trece la nodul 3 unde N_{3-1} și N_{3-2} sînt cunoscute, iar necunoscutele sînt N_{3-5} și N_{3-4} . Poligonul închis al forțelor din condiția de echilibru a nodului 3 este reprezentat în fig. 10.25, *d*, de unde rezultă eforturile N_{3-5} și N_{3-4} , ambele întinderi. Se poate trece acum la nodul 4, apoi la nodurile 5, 6 și 7, construindu-se pentru fiecare nod cîte un poligon de forțe închis.

Se observă că fiecare efort apare în două poligoane, deoarece fiecare bară este legată de două noduri.

Aceasta îngăduie ca poligoanele corespunzătoare fiecărui nod să se așeze unul lîngă altul, astfel încît în loc să se deseneze de două ori fiecare efort, să se deseneze o singură dată, dar să se parcurgă de două ori în sensuri diferite.

Rezultă construcția din fig. 10.25, *e*, în modul următor:

Se construiește întîi poligonul forțelor \bar{P}_2 , \bar{P}_4 și apoi se determină reacțiunile \bar{V}_1 și \bar{V}_7 , de obicei pe cale grafică, care se așază pe poligonul forțelor \bar{P}_2 , \bar{P}_4 . Poligonul \bar{P}_2 , \bar{P}_4 , \bar{V}_7 , \bar{V}_1 este închis.

Se pornește de la nodul 1 desenînd direcțiile în ordinea în care le întîlnim în sensul acelor de ceasornic. Rezultanta forțelor exterioare în nodul 1 este V_1 , iar prima direcție întîlnită în sens orar este 1—2, deci prin extremitatea lui V_1 se duce paralela la N_{1-2} , iar prin originea lui V_1 paralela la 1—3. Astfel s-au determinat N_{1-2} și N_{1-3} cu semnele respective. Se trece acum la nodul 2. Prima forță cunoscută în sens orar este N_{1-2} parcursă acum în sens invers, de aceea se înseamnă cu două săgeți în acest sens nou de

parcursere. A doua forță întâlnită este P_2 . Se observă că ea este așezată de la sine în extremitatea lui N_{1-2} . A treia direcție întâlnită în sens orar este 2-4, deci din extremitatea lui P_2 se duce paralela la 2-4 și ultima direcție se duce din originea poligonului, adică din originea lui N_{1-2} paralela cu 2-3. Parcurgând în continuare N_{1-2} , P_2 , N_{2-4} și N_{2-3} se găsesc și semnele eforturilor N_{2-4} și N_{2-3} . Se trece apoi la nodul 3 și așa mai departe.

Pentru urmărirea ușoară a epurei se obișnuiește o notație specială (notația Bow) care provine din observația că fiecărui nod din fermă îi corespunde câte un poligon închis pe epura eforturilor, iar fiecărui poligon închis de pe fermă îi corespunde un punct de intersecție al laturilor respective pe epură. Pentru aceasta se consideră că atât barele cât și forțele date și reacțiunile de pe fermă sînt laturi de poligoane, iar regiunile dintre forțele paralele se consideră închise la infinit. Asemenea figuri se numesc *figuri reciproce* și de aceea metoda se mai numește *metoda poligoanelor reciproce*.

Se notează intervalele de pe fermă cu literele m, n, p, q, r, s, t, u și v . Atunci în epura eforturilor aceste litere apar în vîrfurile poligoanelor de forțe cum se vede ușor în fig. 10.25, *f*. Orice efort sau forță din epură se notează cu literele de la capete, iar pe fermă, bara sau forța respectivă se găsește între aceste litere. De exemplu, N_{1-2} se va numi acum n, p , căci pe fermă se găsește între n și p , iar pe epură n și p sînt capetele efortului N_{1-2} ; la fel P_2 este n, q .

Pentru ca epura să se determine ușor și corect este necesar ca direcțiile pe epură să fie duse în ordinea în care se întîlnesc pe fermă într-un anumit sens (de exemplu sensul acelor de ceasornic). Astfel, în nodul 2 bara 2-3 se citește rp și are sensul de la r spre p , iar în nodul 3 se citește pr și are sensul de la p spre r . În această notație nu mai este nevoie să se deseneze săgeți, căci sensurile eforturilor reies direct din citirea literelor.

Efortul qr apasă în nodul 2 și efortul rq apasă în nodul 4.

Este deci efort de compresie.

Construind epura pînă la capăt

se observă că atunci cînd se

ajunge la ultimele două noduri

6 și 7 nu mai apar cîte două

necunoscute, ci într-un nod o

singură necunoscută, iar în ce-

lălalt nici una. Avem deci un

mijloc de control al construc-

ției grafice, căci poligoanele

ultimelor noduri trebuie să

se închidă de la sine. Dacă

aceasta nu se întîmplă, rezultă

că s-au produs erori în con-

strucțiunile grafice, și construcția trebuie reluată pînă cînd poligonul se închide.

Aceste posibilități de verificare

provin din faptul că reacțiunile \bar{V}_1 și

\bar{V}_7 au fost determinate pe altă cale și apoi au fost folosite în epură deci

rămîn ecuații de echilibru ale nodurilor, care pot servi la verificare. Dacă

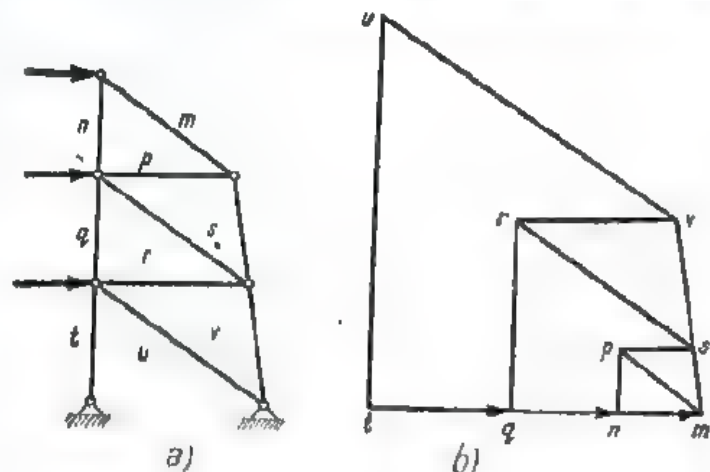


Fig. 10.26

însă se determină eforturile numai din echilibrul nodurilor, fără să se folosească vreo relație suplimentară, adică dacă nu este necesar să se determine reacțiunile în prealabil, așa cum se întâmplă în cazul din fig. 10.26, atunci nu apare verificarea de mai sus.

§ 16. **Calculul grafic al momentelor statice.** Dacă într-o serie de puncte $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ din același plan se găsesc concentrate masele $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ și în același plan se consideră o dreaptă Δ , momentul static al acestor mase în raport cu dreapta Δ este

$$S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 + \dots + m_n d_n,$$

unde $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ sînt distanțele de la fiecare dintre masele concentrate la dreapta Δ .

Calculul grafic al momentului static S este în acest caz identic cu calculul momentului în raport cu un punct oarecare de pe dreapta Δ al unui sistem de vectori $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$ paraleli cu dreapta Δ , de același sens, proporționali cu masele m_1, m_2, \dots, m_n și aplicați în punctele $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Aceasta se realizează cu ajutorul unui poligon de forțe și a poligonului funicular respectiv, așa cum se vede în fig. 10.27. Pentru cele patru mase m_1, m_2, m_3, m_4 din fig. 10.27, *a* s-au construit patru vectori $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ paraleli cu dreapta Δ , față de care trebuie calculat momentul static. Se construiește poligonul vectorilor (forțelor) din fig. 10.27, *b* cu un pol arbitrar O . Cu ajutorul razelor polare respective se construiește poligonul funicular $O'1'2'3'4'$. Valoarea momentului vectorilor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ în raport cu un punct oarecare de pe dreapta Δ este Hm unde H este distanța polară din fig. 10.27 *b*, iar m este segmentul BC interceptat pe dreapta Δ de prima și ultima latură de poligon funicular. Deci momentul static al maselor m_1, m_2, m_3, m_4 în raport cu dreapta Δ este $S = Hm$, unde, așa cum s-a arătat mai înainte, H se măsoară la scara vectorilor \bar{F} , iar s la scara lungimilor. Dacă un centimetru de pe desen reprezintă a metri din natură, iar un centimetru de pe desen reprezintă f unități de vectori \bar{F} (adică de fapt f unități de masă), atunci S poate fi măsurat direct prin segmentul m , dacă se adoptă o scară pentru S astfel ca un centimetru de pe m să reprezinte a/fH unități de moment static.

§ 17. **Centrul maselor (centrul de greutate).** Centrul maselor coincide cu centrul vectorilor paraleli $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$. El nu se schimbă cînd vectorii paraleli $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ se rotesc în jurul punctelor A_1, A_2, \dots, A_n rămîind paraleli. Este suficient deci să se determine suportul rezultantei vectorilor paraleli $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ pentru două direcții diferite. La intersecția celor două suporturi se va găsi centrul maselor (centrul de greutate). În fig. 10.27, *a* prin punctul de intersecție D al primei și ultimei laturi de poligon funicular se duce paralela la dreapta Δ și aceasta va reprezenta suportul rezultantei.

Se rotesc apoi vectorii $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ în jurul punctelor de aplicație A_1, A_2, A_3, A_4 pînă ajung paraleli cu o altă direcție Δ_1 și pentru această direc-

ție cu un nou pol O_1 (fig. 10.27, c) se construiește un nou poligon funicular $0'_1, 1'_1, 2'_1, 3'_1, 4'_1$ care determină punctul E de pe noul suport al rezultantei. Cele două suporturi se întâlnesc în G care este centrul maselor m_1, m_2, m_3, m_4 .

Prin această metodă se poate determina centrul de greutate al unei figuri plane pe cale grafică, așa cum este exemplificat în fig. 10.28. Prin

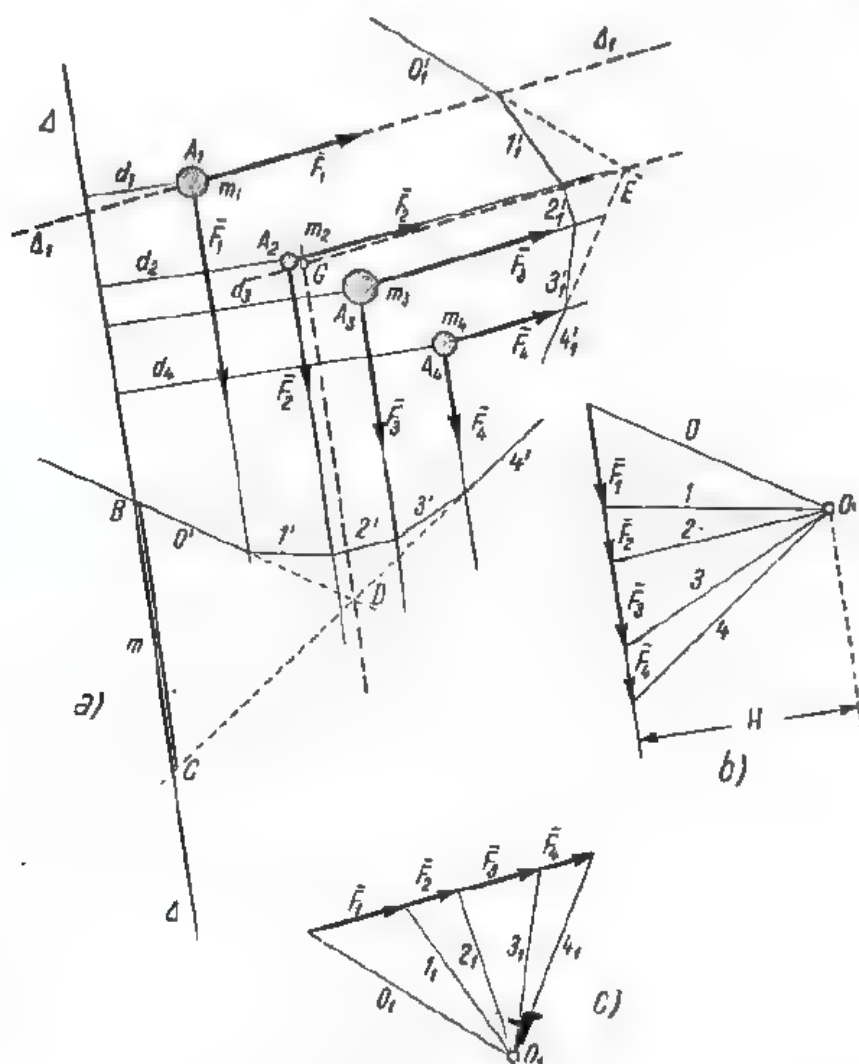


Fig. 10.27

drepte paralele cu o direcție arbitrară se descompune suprafața într-o serie de suprafețe mai mici, ale căror arii și centre de greutate să se poată determina ușor și destul de exact (triunghiuri, dreptunghiuri, trapeze). Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aceste arii și C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 centrele lor de greutate (fig. 10.28, a). Se determină centrul de greutate C , repetind construcția descrisă în fig. 10.27, cu ajutorul a două poligoane funiculare construite cu poli O (fig. 10.28, b) și O_1 (fig. 10.28, c).

Observație. Dacă cele două poligoane funiculare se construiesc cu aceeași distanță polară H , atunci fig. 10.28, c, se poate obține direct din fig. 10.28, b, prin rotația ei

cu unghiul α . În acest caz, toate laturile poligonului funicular $0_1 1_1 2_1 3_1 4_1$ sînt rotite cu unghiul α față de laturile funicularului $0' 1' 2' 3' 4' 5'$. Dacă α este unghiul laturilor unui echer, nu mai este nevoie să se deseneze fig. 10.28, c și ambele poligoane funiculare se desenează concomitent trăgînd laturile $0'$ și 0_1 , $1'$ și 1_1 etc. pe cele două laturi ale echerului. Pentru determinarea grafică corectă a lui C , unghiul α este bine să nu fie prea ascuțit. Se recomandă ca α să fie de 90° . De multe ori, pentru $\alpha=90^\circ$, suportii vectorilor pentru una

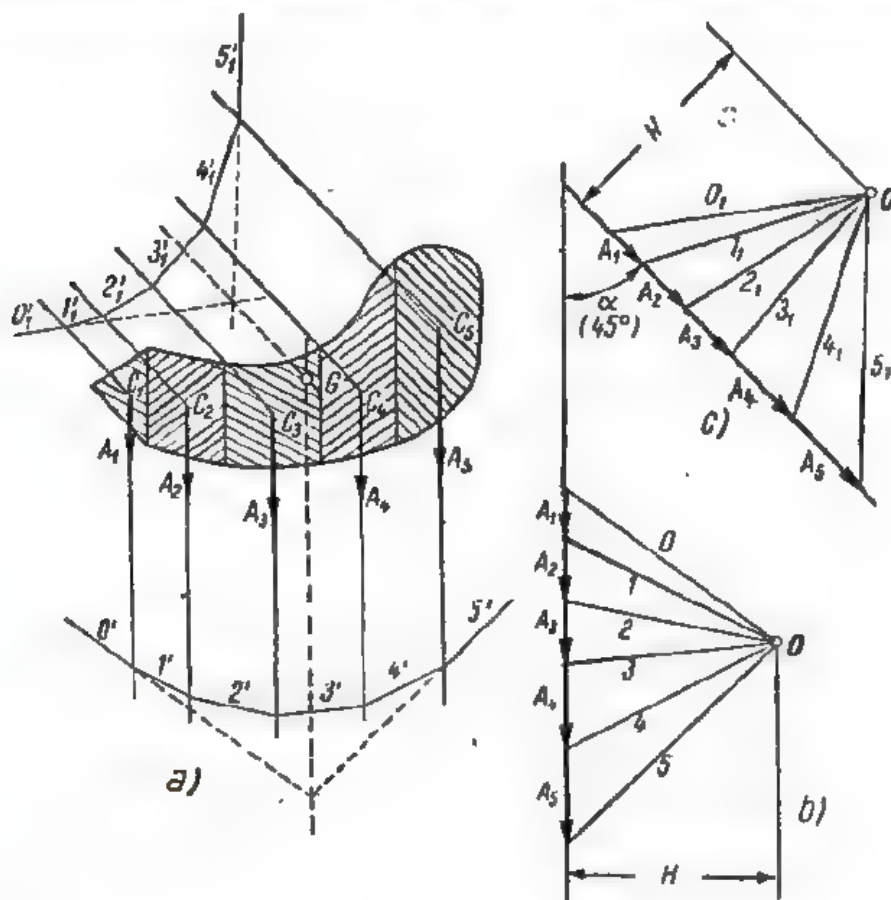


Fig. 10.28

dintre direcții sînt foarte apropiate, cum ar fi fost în fig. 10.28, și, în acest caz, se alege de obicei $\alpha=45^\circ$.

Altă construcție grafică pentru determinarea centrului maselor (centrului de greutate) pleacă de la relația vectorială

$$M\bar{\rho} = m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3 + \dots = \sum m_i\bar{r}_i,$$

unde $M = m_1 + m_2 + \dots = \sum m_i$ este masa totală a sistemului de puncte în același plan cu masele individuale m_1, m_2, \dots, m_n ; $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ sînt vectorii de poziție de la originea (polul) O la masele m_1, m_2, \dots, m_n , iar $\bar{\rho}$ este vectorul de poziție de la aceeași origine (pol) O la centrul maselor C . Astfel, pentru aflarea centrului de greutate al liniei omogene din fig. 10.29, a, se împarte aceasta într-o serie de segmente ale căror mase m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 se concentrează la mijlocurile segmentelor și se unesc aceste puncte cu un punct arbitrar din plan O care definește vectorii de poziție r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 .

În fig. 10.29, *b*, se construiește poligonul vectorilor $m_1\vec{r}_1$, $m_2\vec{r}_2$ etc. care începe în *A* și se termină în *B*. Latura *AB* este rezultanta lor și conform formulei de mai sus este chiar $M\vec{\rho}$. Din *O* se duce paralela la *AB*. Pe această dreaptă se găsește centrul de greutate *C*, la distanța $\rho = OC$ de *O*, care se obține împărțind pe *AB* din fig. 10.29, *b*, la masa totală *M*.

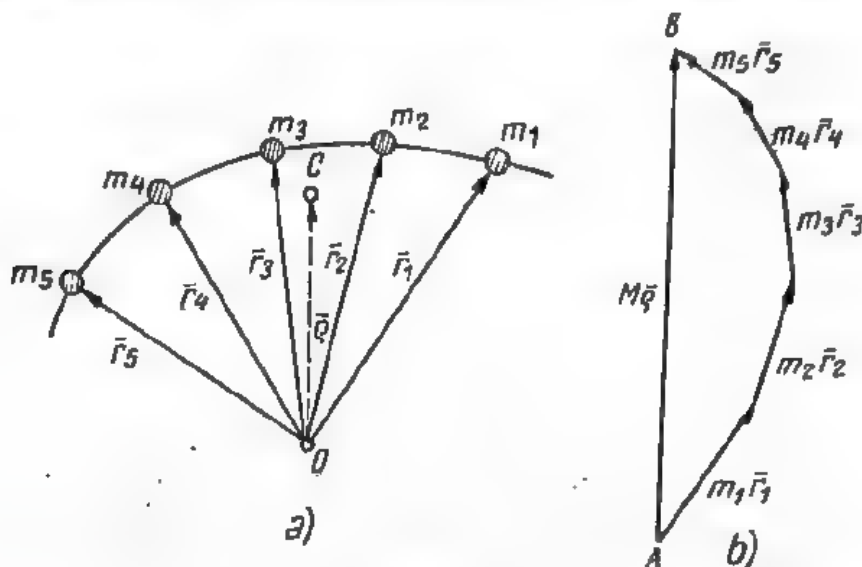


Fig. 10.29

Acest procedeu este mai economic din punct de vedere al desenului decât cel descris anterior, dar în practică se întrebuințează mai rar, deoarece determinarea vectorilor $m_i\vec{r}_i$ necesită atât evaluarea lui m_i cât și a vectorului de poziție \vec{r}_i , apoi înmulțirea lor, pe cînd în procedeu anterior se evaluează numai masele m_i .

§ 18. **Compunerea forțelor concurente în spațiu.** Un sistem de forțe concurente în spațiu se reduce la o rezultantă care trece prin punctul de concurență sau este echivalent cu zero.

Rezultanta se determină cu ajutorul unui poligon de forțe în spațiu, analog poligonului de forțe din plan. Pentru determinarea grafică se folosesc mijloacele geometriei descriptive, proiectînd sistemul de forțe pe două plane perpendiculare: orizontal și vertical.

Proiecțiile poligonului de forțe din spațiu pe cele două plane vor fi două poligoane de forțe plane alcătuite din proiecțiile forțelor pe aceste plane.

În fig. 10.30 forțele F_1, F_2, F_3, F_4 concurente în *O* sînt reprezentate în cele două plane de proiecție concurente în proiecțiile *O'* și *O''*.

Dintr-un punct arbitrar (*A'*, *A''*) se construiesc poligoanele de forțe în cele două plane cu proiecțiile forțelor obținîndu-se punctul (*B'*, *B''*). $\vec{R}' = \vec{A'B'}$ și $\vec{R}'' = \vec{A''B''}$ reprezintă proiecțiile rezultantei forțelor F_1, \dots, F_4 . Poziția ei este determinată de punctul (*O'*, *O''*). Mărimea reală a rezultantei se află prin metodele geometriei descriptive. În fig. 10.31, *a* se arată metoda rotirii în jurul unei axe verticale care ne duce la valoarea reală $\vec{c'd'}$.

iar în fig. 10.31, *b* este arătată metoda diferenței de cote care ne duce la valoarea reală $c''d''_1$.

Observație. Din compunerea forțelor concurente rezultă că dacă poligonul de forțe este închis, adică în fig. 10.30, punctul (A', A'') coincide cu (B', B'') rezultanta sistemului de forțe este nulă și fiind vorba de forțe concurente, rezultă că forțele sînt în echilibru.

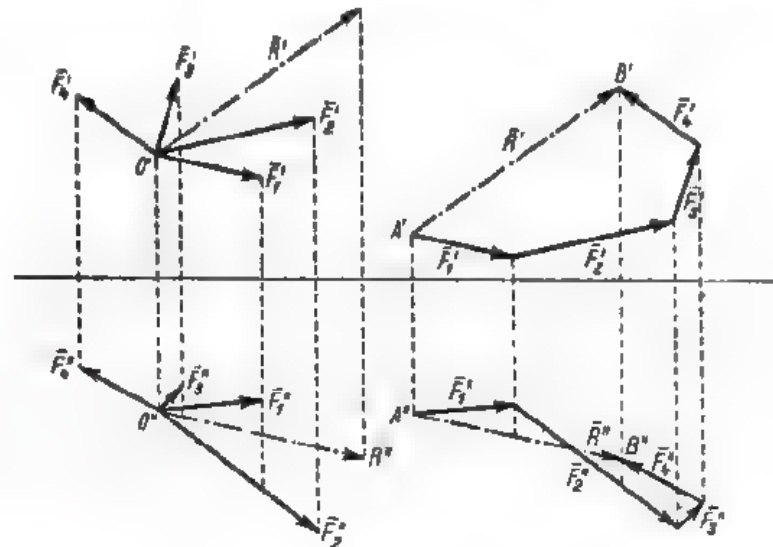


Fig. 10.30

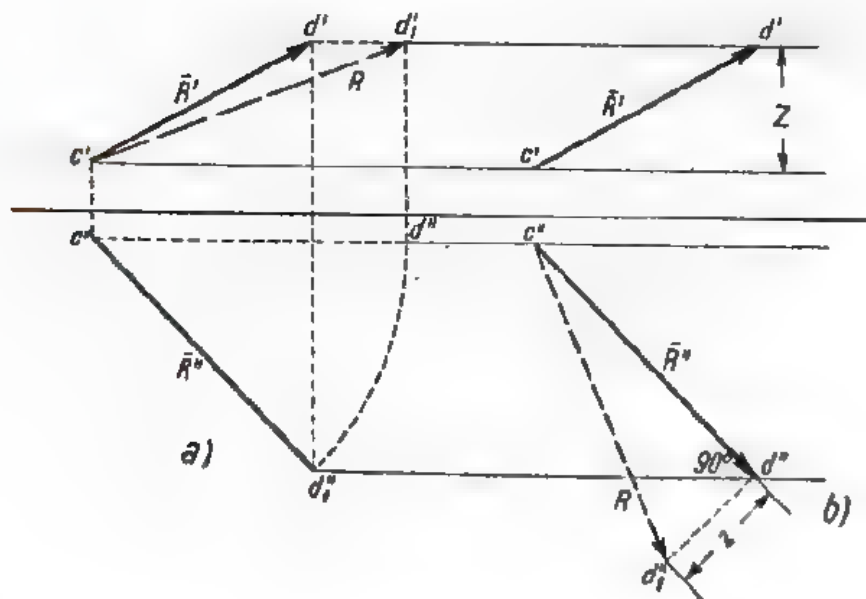


Fig. 10.31

Deci, condiția grafică de echilibru a forțelor concurente în plan și în spațiu este: poligon de forțe închis.

§ 19. **Desecompunerea unei forțe după trei suporturi necoplanare concurente pe forță.** Aceasta revine teoretic la a construi un paralelipiped, care să aibă muchiile paralele cu cele trei suporturi și în care forța dată să fie diagonală lui.

Pentru obținerea grafică a celor trei componente se recurge la două plane de proiecție.

Dacă se pot alege planele de proiecție astfel încât pe unul dintre ele, două suporturi să se proiecteze după aceeași dreaptă, construcția grafică este foarte simplă, așa cum se arată în fig. 10.32, unde (O', O'') reprezintă pro-

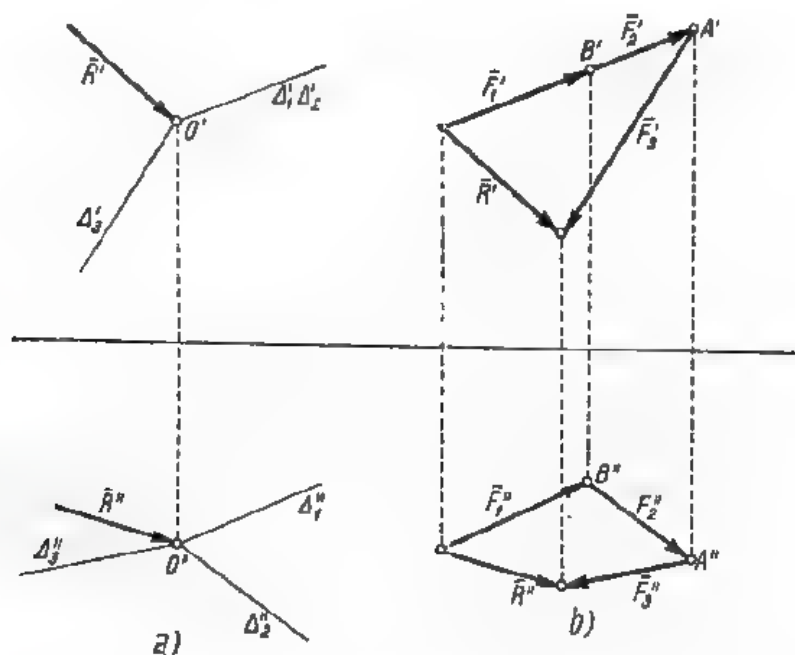


Fig. 10.32

iecțiile lui O pe cele două plane, vertical și orizontal. În planul vertical direcțiile Δ_1 și Δ_2 se proiectează după aceeași dreaptă Δ'_1, Δ'_2 . În planul orizontal suporturile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ se proiectează în $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3$. Forța exterioară \bar{R} din O are proiecțiile \bar{R}' și \bar{R}'' pe cele două plane. Epura se începe în planul vertical unde poligonul de forțe din spațiu, cu patru laturi $\bar{R}, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, se proiectează după un triunghi deoarece \bar{F}_1 și \bar{F}_2 se proiectează după aceeași dreaptă. Din extremitățile lui \bar{R}' se duc paralele la Δ'_3 și Δ'_1 și în triunghiul astfel format \bar{F}'_3 este determinat. În planul orizontal prin extremitățile lui \bar{R}'' se duc paralele la Δ''_1 și Δ''_3 . Cu ajutorul lui \bar{F}'_3 din planul vertical, se determină prin proiecția lui A' în A'' mărimea \bar{F}''_3 și din extremitatea acestuia se duce paralela la Δ''_2 care prin intersecția cu \bar{F}''_1 în B'' determină mărimea lui \bar{F}''_2 și \bar{F}''_1 . Ridicînd pe B'' în B' (în planul vertical) se determină \bar{F}'_1 și \bar{F}'_2 . Sensurile forțelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ se determină prin parcurgerea poligoanelor de forțe în cele două plane de proiecție de la origine spre extremitatea lor (\bar{R}', \bar{R}'').

Dacă se alege unul dintre planele de proiecție ca mai înainte și în fiecare dintre cele două plane cele trei forțe se proiectează după drepte distincte, se indică două procedee:

În primul se interpretează grafic metoda generală: prin suportul forței \bar{R} și a uneia dintre direcții Δ_1 se duce un plan, iar prin celelalte două direcții Δ_2 și Δ_3 alt plan. Cele două plane se intersectează după o dreaptă OA . În planul (\bar{R}, Δ_1) se descompune \bar{R} după Δ_1 și dreapta OA , iar în al doilea plan (Δ_2, Δ_3) se descompune componenta de pe OA după Δ_2 și Δ_3 .

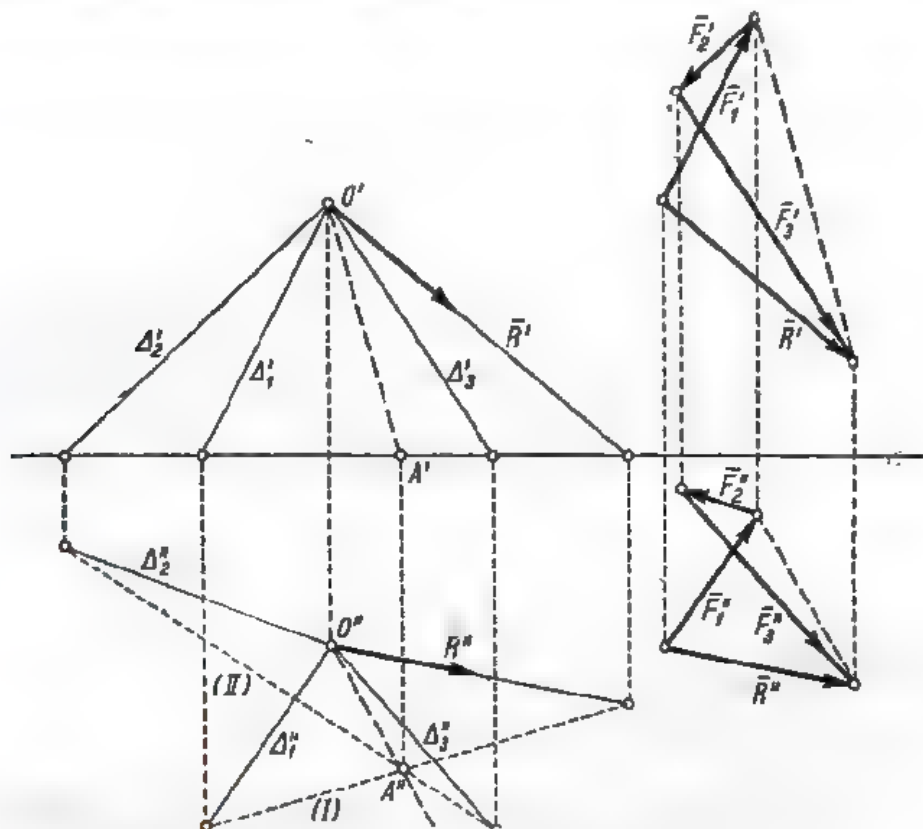


Fig. 10.33

În fig. 10.33 este indicată această construcție. Dreapta (I) reprezintă urma orizontală a planului (\bar{R}, Δ_1) , iar dreapta (II) reprezintă urma orizontală a planului (Δ_2, Δ_3) . Punctul A'' unde se întâlnesc cele două urme (I) și (II) este punctul unde dreapta de intersecție a planelor (\bar{R}, Δ_1) și (Δ_2, Δ_3) înțeapă planul orizontal. Punctul A' se va găsi deci pe linia de pământ și $O'A'$, $O''A''$ reprezintă dreapta de intersecție OA . Se descompune în fiecare plan proiecția forței \bar{R} după proiecțiile dreptelor Δ_1 și OA , iar apoi, componenta după OA se descompune după proiecțiile dreptelor Δ_2 și Δ_3 . Sensurile forțelor \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 se obțin prin parcurgerea poligoanelor de la origine spre extremitatea lui \bar{R} .

Procedeul este simplu, dar de multe ori dreapta OA este greu de determinat, prin faptul că necesită intersecții care ies din cadrul epurei. De aceea este mai practic procedeul următor, indicat în fig. (10.34).

Prin extremitățile lui \bar{R}' și \bar{R}'' se duc paralele la Δ_1' și Δ_3' respectiv Δ_1'' și Δ_3'' . În planul orizontal se duce o paralelă $A''B''$ la dreapta Δ_2'' . Punctul B'' se raportează în B' , de aici se duce paralela la Δ_2' , din A'' , verticala care

determină pe A' . Punctul A' nu se va găsi, în general, pe F'_3 , deci poziția $A''B''$ nu este cea justă. Dacă vom lua o altă dreaptă $A''B''$ paralelă cu F'_2 vom găsi un alt punct A' . Se observă că patrulaterul $A''B''B'A'$ se deformează, astfel încât toate laturile sale rămân paralele, iar trei vîrfuri A'' , B'' și B' se deplasează pe trei drepte, deci în baza teoremei care a fost stabilită mai înainte, al patrulea

vîrf A' se va deplasa și el pe o dreaptă. Pentru a determina o a doua poziție a punctului A' se pornește de la o nouă poziție pentru $A''B''$ paralelă cu Δ'_2 . În figură s-a luat pentru această poziție chiar punctul de intersecție A'_1 al lui \bar{F}'_1 cu \bar{F}'_3 . Punctul B'_1 se confundă cu A'_1 . Acest punct se ridică pe verticală în A'_1 pe dreapta F'_1 . În A'_1 se găsește și B'_1 . Dreapta $A'A'_1$ întâlnește dreapta \bar{F}'_3 în punctul A'_2 . Din A'_2 se duce $A'_2B'_2$ paralelă cu F'_2 . Proiectînd A'_2 în A''_2 pe \bar{F}'_3 și B'_2 în B''_2 pe \bar{F}'_1 vom găsi dreapta $A''_2B''_2$, care pentru verificare, trebuie să fie paralelă cu \bar{F}'_2 . În modul acesta au fost determinate componentele (\bar{F}'_1, \bar{F}'_1) , (\bar{F}'_2, \bar{F}'_2)

și (\bar{F}'_3, \bar{F}'_3) . Sensurile se obțin din urmărirea poligoanelor de forțe în fiecare dintre cele două plane de proiecție.

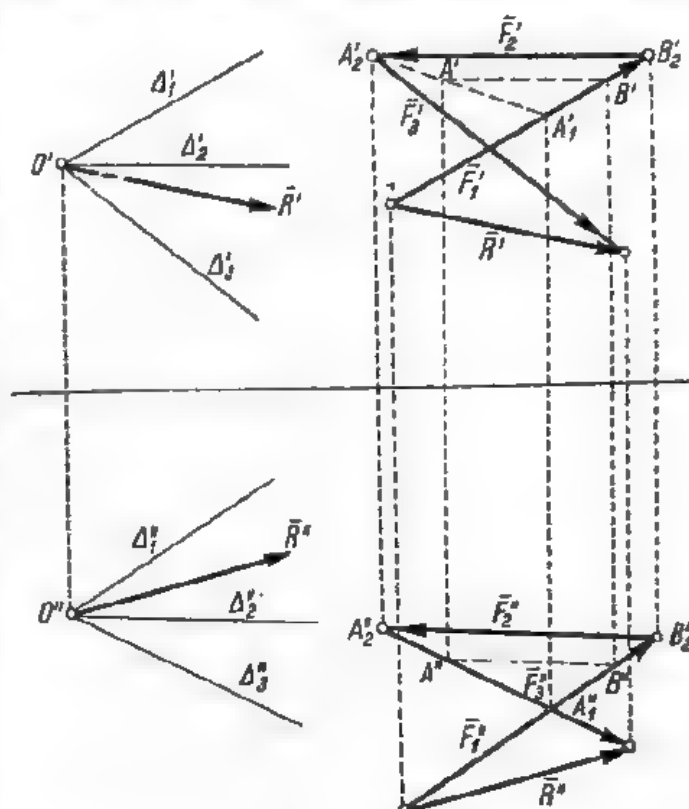


Fig. 10.34

XI. APLICAȚII ALE STATICII

§ 1. Generalități. Pentru a-și ușura munca, din timpuri îndepărtate, omul a realizat și folosit diferite dispozitive mecanice simple ca pîrghia, trolul, scripetele, planul înclinat și șurubul, pe care apoi, în timp, a căutat să le perfecționeze și să le folosească fie direct, fie în construcția diferitelor mașini și instalații.

Din punct de vedere mecanic, aceste dispozitive sînt solide rigide sau sisteme de solide rigide, supuse la două categorii de forțe:

- forțe de acționare, P (forțe motoare); care caută să pună sistemul în mișcare;
- forțe rezistente, Q , care se opun mișcării.

Sistemul de forțe care acționează asupra acestor dispozitive trebuie să fie în echilibru; în consecință, pentru rezolvarea problemelor care se pun, se pot folosi rezultatele staticii teoretice.

Cu ajutorul acestor dispozitive, în genere, se pot învinge forțele rezistente Q , întrebunțind forțe de acționare P mult mai mici. Uneori însă forța de acționare este egală sau chiar mai mare decât forța rezistentă. În astfel de cazuri, dispozitivul respectiv își justifică existența și utilizarea, fie prin posibilitatea de schimbare a direcției sau sensului forței motoare, fie prin echilibrarea dispozitivului într-un mod mai convenabil din punct de vedere practic.

Toate dispozitivele mecanice care se studiază la acest capitol au un singur grad de libertate. Calculul lor constă în studierea echilibrului lor, fie că sînt în repaus, fie că au o mișcare uniformă.

În unele manuale, aceste dispozitive mecanice simple sînt numite „mașini simple” în fond ele sînt cele mai simple unelte folosite de om.

A. PÎRGHIA

§ 2. *Pîrghia.* Prin pîrghie se înțelege un corp rigid cu un punct fix sau o axă fixă, acționat de două forțe: o forță motoare P și o forță rezistentă Q . Suporturile celor două forțe sînt conținute într-un plan normal pe axa de rotație a corpului și nu întîlnesc această axă (fig. 11.1).

De obicei pîrghiile sînt alcătuite din bare drepte, cotite sau curbe.

Din punct de vedere al poziției relative a axei O față de forțele P și Q pîrghiile pot fi de trei categorii:

- a) — de ordinul întâi (fig. 11.1);
- b) — de ordinul al doilea (fig. 11.2);
- c) — de ordinul al treilea (fig. 11.3).

Dacă se notează cu p brațul forței motoare și cu q brațul forței rezistente, ecuația de momente în raport cu axa de rotație, într-o primă aproximație, cînd se neglijează frecările, este

$$Pp - Qq = 0,$$

de unde

$$P = \frac{q}{p} Q. \quad (11.1)$$

La pîrghiile de ordinul întâi se poate întîlni unul dintre următoarele trei cazuri:

$p = q$, respectiv $P = Q$, cum este cazul balanțelor cu brațe egale;

$p > q$, respectiv $P < Q$, cazul general, pîrghia reprezentînd un dispozitiv care economisește forțele;

$p < q$, respectiv $P > Q$.

La pîrghiile de ordinul al doilea $p > q$ și deci întotdeauna $P < Q$. Aceste pîrghii economisind forța motoare sînt mult utilizate în construcția mașinilor, precum și în transmiterea și transformarea mișcărilor.

La pîrghiile de ordinul al treilea $p < q$ și deci întotdeauna $P > Q$.

Dacă se ține seama și de frecarea din lagăr, ecuația de momente devine:

$$Pp - Qq - \mu_1 N r = 0, \quad (11.2)$$

în care s-a notat cu μ_1 coeficientul de frecare în lagăr, cu N modulul reacțiunii și cu r raza fusului articulației.

Modulul reacțiunii N este dat de expresia

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}, \quad (11.3)$$

unde α reprezintă unghiul dintre suporturile forțelor P și Q . Introducând expresia lui N în (11.2) se obține

$$Pp - Qq - \mu_1 r \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} = 0. \quad (11.4)$$

În cazul particular când suporturile forțelor P și Q sînt paralele, $\alpha = 0^\circ$ și formula (11.4) devine

$$P = \frac{q + \mu_1 r}{p - \mu_1 r} Q = \frac{q}{p} \frac{1 + \frac{\mu_1 r}{q}}{1 - \frac{\mu_1 r}{p}} Q. \quad (11.5)$$

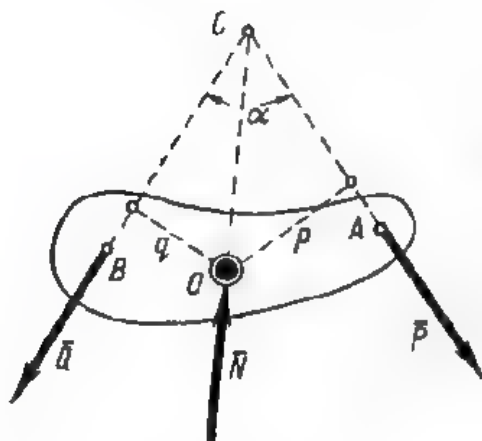


Fig. 11.1

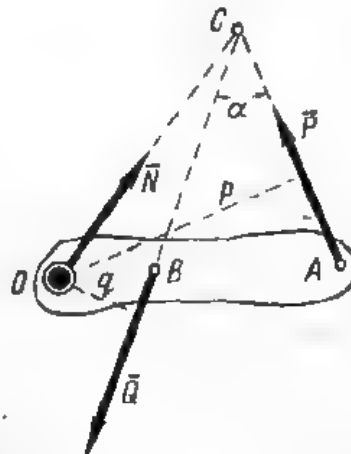


Fig. 11.2

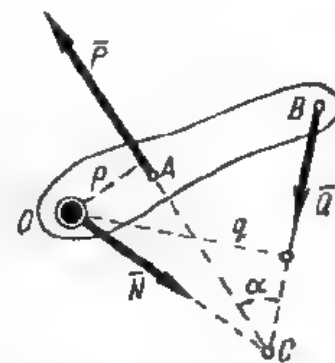


Fig. 11.3

Comparînd formulele (11.1) cu (11.5) se vede că, prin considerarea frecării, raportul $\frac{q}{p}$ se multiplică cu coeficientul

$$k = \frac{1 + \frac{\mu_1 r}{q}}{1 - \frac{\mu_1 r}{p}} > 1, \quad (11.6)$$

adică forța motoare P în acest caz este mai mare decît cea necesară în cazul cînd frecarea din lagăr ar fi neglijabilă.

§ 3. Sisteme de pîrghii articulate. În cazul unei singure pîrghii, raportul de demultiplicare este dependent de lungimea brațelor p și q .

Pentru a se obține rapoarte de demultiplicare mai importante se folosesc diferite grupări de pîrghii, constituind sisteme de pîrghii articulate. Acestea au o largă utilizare în construcția mașinilor, a aparatelor de cîntărit, la frîne, regulatoare etc.

În fig. 11.4 este reprezentată schematic o presă cu genunchi, compusă din barele $B_1C_1 = B_1D_1 = B_2C_2 = B_2D_2$, $A_1B_1 = A_2B_2$ și $A_1M = A_2M$ articulate ca în figură.

Piesa superioară B are o mișcare de translație verticală, între ghidajele G_1, G_2 . Punctul M , articulat cu pieșorul unei biele se deplasează sub acțiunea forței P și prin sistemul de pîrghii articulate produce barei E forța Q , utilizată ca forță de presare.

Între P și Q există relația (se neglijează frecările)

$$P = \frac{2Q}{\tan \alpha \tan \beta - 1}. \quad (11.7)$$

Considerind spre exemplu, $P=2500$ kgf, $\alpha=76^\circ$, $\beta=82^\circ$ se obține o forță de presare Q de 34 400 kgf.

Un alt exemplu de pîrghii articulate se vede la frîna cu doi saboți, arătată în fig. 11.5. Frîna se compune din pîrghiile O_1A_1 și O_2A_2 articulate respectiv în punctele fixe O_1 și O_2 , capetele lor A_1 și A_2 fiind articulate prin intermediul barelor A_1C_1 și A_2C_2 cu pîrghia cotică $DO_2C_1C_2$, care se rotește în jurul lui O_2 . De pîrghiile O_1A_1 și O_2A_2 sînt fixați în punctele B_1 și B_2 saboții S_1 și S_2 care pot fi presați asupra tamburului de frînare de rază R . Solidar cu acesta și coaxial cu el, este un al doilea tambur, de rază r , pe care este înfășurat un cablu, la capătul liber al căruia este atîrnată sarcina Q . Dacă forța P acționează

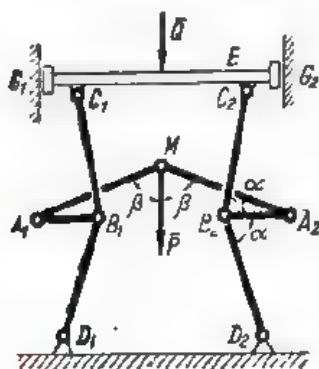


Fig. 11.4

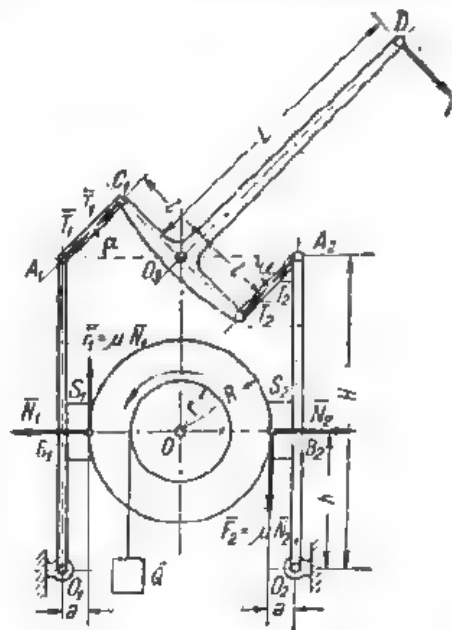


Fig. 11.5

în D , forțele de frecare F_1 și F_2 care iau naștere între saboții S_1 , S_2 și tambur, mențin sarcina Q în echilibru.

Condiția de echilibru a pîrghiei $DO_2C_1C_2$ este

$$PL = (T_1 + T_2)l,$$

unde presupunem $T_1 = T_2 = \frac{PL}{2l}$

Pîrghia A_2O_2 este în echilibru sub acțiunea forțelor T_2 în A_2 , N_2 și $F_2 = \mu N_2$ în B_2

$$T_2 \cos \alpha H - N_2 h - \mu N_2 a = 0.$$

Pîrghia A_1O_1 este în echilibru sub acțiunea forțelor T_1 în A_1 , N_1 și $F_1 = \mu N_1$ în B_1

$$T_1 \cos \alpha H - N_1 h + \mu N_1 a = 0.$$

Din relațiile de mai înainte rezultă presiunile celor doi saboți asupra tamburului

$$N_1 = T_1 \frac{H \cos \alpha}{h - \mu a}, \quad N_2 = T_2 \frac{H \cos \alpha}{h + \mu a}.$$

Acste presiuni sînt diferite. Deoarece $F_1 = \mu N_1$ și $F_2 = \mu N_2$, rezultă că și frecările celor doi saboți pe tambur sînt diferite.

Pentru ca sarcina Q să fie menținută în echilibru trebuie ca suma momentelor în raport cu axa O să fie nulă

$$Qr = \mu R(N_1 + N_2), \quad Qr = P \left[\frac{\mu R L H \cos \alpha}{2l} \left(\frac{1}{h + \mu a} + \frac{1}{h - \mu a} \right) \right].$$

de unde rezultă

$$P = Q \frac{r l (h^2 - \mu^2 a^2)}{\mu R L H h \cos \alpha}.$$

§ 4. Aparato de cîntărit a) *Balanța cu brațe egale.* Din punct de vedere al mecanicii, o balanță cu brațe egale este o pîrghie de ordinul întâi în care $p=q$. Dacă frecarea în axa de rotație este neglijabilă, din (11.1) rezultă

$$P=Q.$$

Calitățile unei balanțe sînt *exactitatea* și *sensibilitatea*.

Se înțelege prin *exactitatea* unei balanțe calitatea ei de a avea brațul perfect orizontal atunci cînd platanele sînt neîncărcate, sau cînd pe cele două platane sînt așezate greutăți egale.

Exactitatea unei balanțe se asigură printr-o egalitate a brațelor p și q și prin reducerea frecărilor în axa de rotație (rezemări pe cuțite).

Se înțelege prin *sensibilitatea* unei balanțe proprietatea pe care o are de a-și modifica poziția brațului atunci cînd în cele două platane sînt așezate greutăți diferite. Ca măsură a sensibilității se poate considera unghiul θ de înclinare a brațului, atunci cînd diferența dintre cele două greutăți are o anumită valoare.

Dacă se notează cu l lungimea brațului, cu P sarcina de pe un platan, cu $P+\Delta P$ sarcina de pe celălalt platan, cu G greutatea proprie a brațelor și cu d distanța de la axa de rotație pînă la centrul de greutate al brațelor, ecuația de momente față de axa de rotație este (fig. 11.6)

$$(P+\Delta P)l \cos \theta - Pl \cos \theta - Gd \sin \theta = 0, \quad (11.8)$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta Pl}{Gd}. \quad (11.9)$$

Din expresia (11.9) rezultă că o balanță este cu atît mai sensibilă, cu cît are brațele mai lungi, cu cît greutatea lor proprie G este mai mică și cu cît centrul de greutate al brațelor situat sub axa de rotație, este mai aproape de această axă.

b) *Cîntarul roman.* Este din punctul de vedere al mecanicii, o pîrghie de ordinul întâi cu brațele neegale (fig. 11.7). Unul dintre brațe, OB , la extremitatea căruia se atîrnă platanul, are o lungime dată. În lungul celuilalt braț poate aluneca un cursor de o anumită greutate P . Fie G greutatea brațului și a platanului și O_1 centrul de greutate respectiv.

În stare neîncărcată echilibrul are loc atunci cînd cursorul este așezat în A_0 . Ecuația de momente față de punctul O este

$$G \times OO_1 = P \times OA_0. \quad (11.10)$$

Cînd se așază pe platan o greutate Q , pentru restabilirea echilibrului, este necesar să fie deplasat cursorul din A_0 în A_1 . Ecuația de momente în noua situație este

$$G \times OO_1 + Q \times OB = P \times OA_1.$$

Comparînd această relație cu (11.10) se deduce

$$Q \times OB = P \times (OA_1 - OA_0) = P \times A_1A_0. \quad (11.11)$$

Din relația (11.11) rezultă că greutatea Q este proporțională cu lungimea A_1A_0 . Această proprietate permite să se dividă brațul lung al cîntarului în modul următor: pe platan se așază o greutate cunoscută, de exemplu de 1 kgf și se determină poziția A_1 corespunzătoare a cursorului. Dacă $A_0A_1 = \lambda$ atunci diviziunile corespunzătoare greutăților de 2 kgf, 3 kgf etc. vor fi respectiv 2λ , 3λ etc. Împărțind intervalele în părți egale, se pot determina diviziunile corespunzătoare fracțiunilor de kilogramforță.

c) *Cîntarul zecimal.* Este alcătuit dintr-un sistem de pîrghii articulate dispuse așa cum se arată în fig. 11.8. Pe pîrghia DE este așezată undeva, la distanța d de extremitatea D , greutatea Q . Această pîrghie se sprijină în F pe un cuțit solidar cu pîrghia FG .

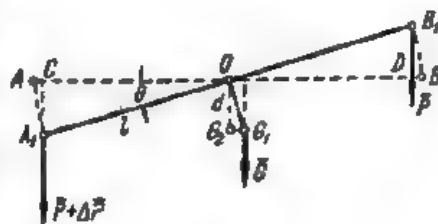


Fig. 11.6

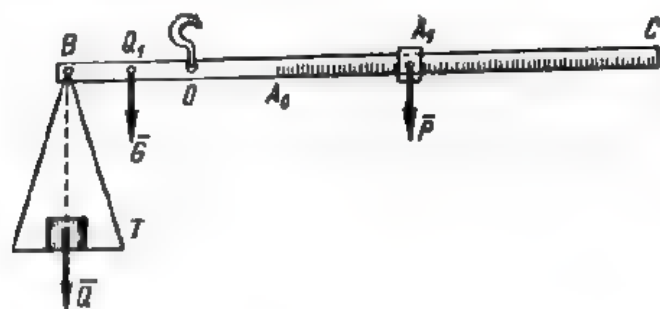


Fig. 11.7

Pirghia FG se sprijină la rîndul ei în G pe alt cușit. Extremitățile D și F ale celor două pirghii sînt legate respectiv prin tiranții DB și FC de pirghia ABC care se sprijină în O . În extremitatea A este legat un platan pe care se așază greutatea P .

Relația între P și Q se stabilește din ecuațiile de echilibru ale pirghilor DE , FG și ABC . Rezultă

$$Q_1 = \frac{Q \times (DE - d)}{DE}, \quad Q_2 = \frac{Q \times d}{DE}, \quad Q_3 = \frac{Q_2 \times E'G}{FG} = Q \frac{d}{DE} \times \frac{E'G}{FG}$$

$$P = \frac{Q_1 \times OB + Q_3 \times OC}{OA} = \frac{Q}{OA} \left[OB + \left(\frac{OC}{DE} \times \frac{E'G}{FG} - \frac{OB}{DE} \right) d \right].$$

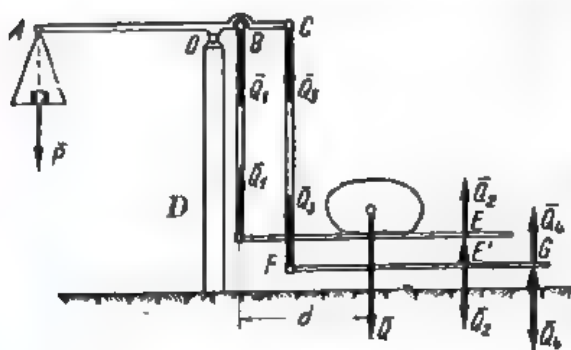


Fig. 11.8

Pentru ca rezultatul cîntăririi să fie independent de poziția greutății Q pe cîntar, este necesar să se anuleze coeficientul lui d , adică

$$\frac{E'G}{FG} = \frac{OB}{OC}. \quad (11.12)$$

Dacă este îndeplinită condiția (11.12) atunci

$$P = \frac{OB}{OA} Q. \quad (11.13)$$

Total se comportă deci ca și cînd sarcina Q ar acționa în B . Alegînd $OA = 10 \cdot OB$ rezultă

$$P = \frac{Q}{10}.$$

Pe platanul cîntarului este necesar să se așeze o greutate P de zece ori mai mică decît greutatea Q care trebuie cîntărită. De aici și denumirea de cîntar zecimal.

B. TROLIUL

§ 5. Trolul. Trolurile servesc la ridicarea greutăților. Trolul simplu (fig. 11.9) se compune dintr-un tambur cilindric pe care este înfășurat un cablu (sau un lanț) care are un capăt fixat de tambur, iar de celălalt capăt atîrnă sarcina Q ce trebuie ridicată. Tamburul are la extremități două fusuri care se rotesc în lagăre. Pe tambur se află fixată o roată la extremitatea căreia se aplică, tangențial, forța motoare P .

Notînd cu r raza tamburului și cu R raza roții și neglijînd frecările în lagăre, rigiditatea cablului și greutatea acestuia, ecuația de momente în raport cu axa de rotație se scrie

$$PR - Qr = 0, \text{ de unde } P = Q \frac{r}{R}. \quad (11.14)$$

Dacă se ține seama de greutatea cablului, atunci, notînd cu q greutatea sa pe unitatea de lungime și cu l lungimea porțiunii de cablu care atîrnă, ecuația de momente devine

$$PR - (Q + ql)r = 0, \text{ de unde } P = (Q + ql) \frac{r}{R}. \quad (11.15)$$

Se observă că sarcina P variază cu lungimea l a cablului desfășurat. Pentru a menține constantă sarcina P în timpul ridicării greutății Q , se utilizează un trolu cu tambur tronconic. În modul acesta, pe măsură ce greutatea Q se urcă (l descrește) raza r crește astfel încît produsul $(Q + ql)r$ să rămînă constant. Ca urmare: $P = \text{const.}$

Un asemenea trolu se numește trolu regulator (fig. 11.10).

Trolul cu ax vertical se mai numește și cabestan.

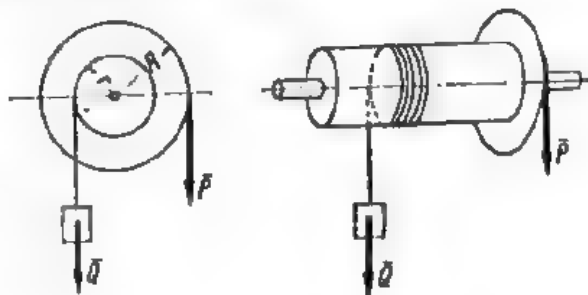


Fig. 11.9

§ 6. **Trolul diferențial.** Are tamburul format din două porțiuni cilindrice de raze diferite R și r (fig. 11.11). Greutatea Q care trebuie ridicată este atârnată de furca unui scripete mobil. Cablul, petrecut pe după scripete este înfășurat în sensuri diferite pe cele două porțiuni de tambur. Când trolul este rotit astfel încât cablul să se înfășoare pe porțiunea de tambur de rază R , el se va desfășura de pe porțiunea de tambur de rază r . Deoarece $R > r$ rezultă că porțiunea de cablu care se înfășoară este mai mare decât cea care se desfășoară, deci greutatea Q se urcă.

Neglijând frecările și rigiditatea firelor, tensiunile din firele trolului sînt egale cu $Q/2$ și ecuația de momente față de axa trolului se scrie

$$Pl + \frac{Q}{2}r - \frac{Q}{2}R = 0, \text{ de unde } P = \frac{R-r}{2l}Q. \quad (11.16)$$

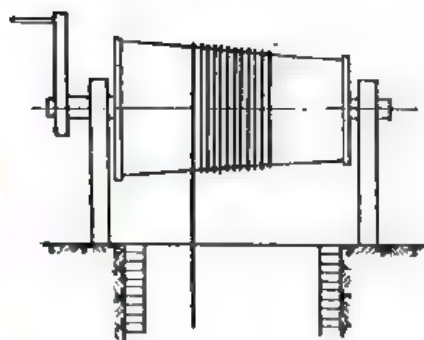


Fig. 11.10

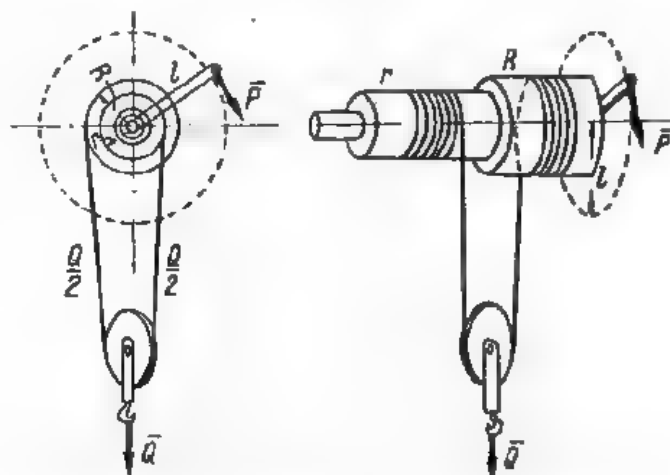


Fig. 11.11

Se observă că raportul dintre forța motoare P și cea rezistentă Q este proporțional cu diferența $R-r$ a razelor celor două porțiuni de tambur. De aci și denumirea de troliu diferențial.

C. SCRIPETELE

§ 7. **Scripetele.** Scripetele este alcătuit dintr-un disc circular avînd pe periferia lui un șanț, prin care trece un cablu (sau un lanț). Axul scripetelui este prins într-o furcă care se termină cu un cârlig.

a) **Scripetele fix** (fig. 11.12). În acest caz, dacă se neglijează frecările și rigiditatea firului, din ecuația de momente

$$PR - QR = 0, \text{ rezultă } P = Q, \quad (11.17)$$

Dacă se ține seama de frecarea în lagăre, ecuația de momente se scrie

$$PR - QR - \mu_1 N r = 0,$$

unde μ_1 este coeficientul de frecare în lagăre, r este raza fustului scripetelui, iar N este modulul reacțiunii din axă

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}.$$

În această expresie α este unghiul dintre suporturile forțelor P și Q . În cazul cînd cele două suporturi sînt paralele $N = P + Q$ și rezultă ecuația de momente

$$PR - QR - \mu_1 r (P + Q) = 0, \text{ de unde } P = \frac{R + \mu_1 r}{R - \mu_1 r} Q. \quad (11.18)$$

În cele de mai înainte s-a presupus cablul perfect flexibil. În realitate el opune oarecare rezistență la încovoiere. Această rezistență este cunoscută sub numele de *rigiditate* și ea se manifestă prin aceea că în regiunile BB_1 și AA_1 în care cablul se înfășoară, sau se desfășoară de pe scripete (fig. 11.13), curbura variază continuu, de la valoarea $\frac{1}{R}$ până la valoarea 0 (zero) și nu brusc, așa cum ar fi posibil numai în cazul unei flexibilități per-

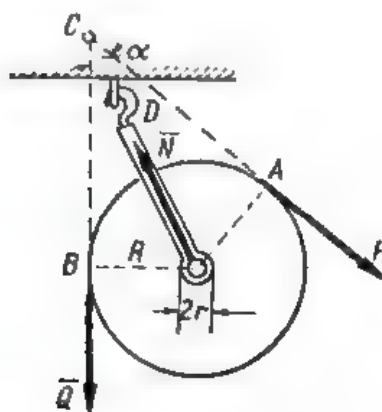


Fig. 11.12

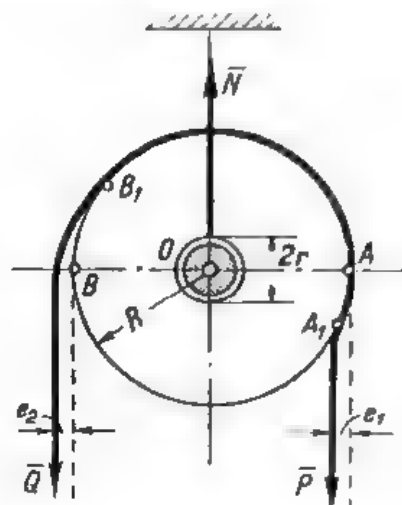


Fig. 11.13

fecte. Ca urmare, cablul se apropie cu distanța e_1 de axa de rotație, în porțiunea în care se aplică forța motoare P și se îndepărtează cu distanța e_2 de aceeași axă în porțiunea în care se aplică forța rezistentă Q . Ecuația de momente se scrie în acest caz (fig. 11.13)

$$P(R - e_1) - Q(R + e_2) - \mu_1 N r = 0.$$

Dacă suporturile forțelor P și Q sînt paralele, $N = P + Q$ și, din ecuația de momente, se deduce

$$P = \frac{R + e_2 + \mu_1 r}{R - e_1 - \mu_1 r} Q. \quad (11.19)$$

Deoarece mărimile e_1 , e_2 și r sînt foarte mici, formula (11.19) se poate scrie în mod aproximativ

$$P = \left[1 + \frac{e_1 + e_2 + 2\mu_1 r}{R - e_1 - \mu_1 r} \right] Q \approx \left[1 + \frac{e_1 + e_2}{R} + \frac{2\mu_1 r}{R} \right] Q. \quad (11.20)$$

Notînd $\lambda = \frac{e_1 + e_2}{R}$ și $k = 1 + \lambda + \frac{2\mu_1 r}{R}$, expresia forței P se poate scrie

$$P \approx kQ. \quad (11.21)$$

Deoarece $k > 1$ rezultă $P > Q$. Scripetele simplu are rolul de a schimba direcția de transmitere a forței, din care cauză se întrebuintează cu *scripete de ghida*.

Valorile coeficientului λ , în funcție de diametrul d al cablului se pot lua:

$$\lambda = 0,02 d^3 \dots\dots\dots 0,06 d^3 \text{ pentru funii de cânepă;}$$

$$\lambda = 0,06 d^3 \dots\dots\dots 0,09 d^3 \text{ pentru cabluri de oțel.}$$

b) *Scripetele mobil*. Scripete mobil este orice scripete al cărui ax este deplasabil. De axul unui astfel de scripete se poate atîrna sarcina de ridicat Q (fig. 11.14, a) sau se aplică forța motoare P (fig. 11.14, b); în primul caz scripetele mobil servește pentru demulțificarea forței motoare, iar în al doilea caz pentru demulțificarea vitezei de acționare a sarcinii.

Să considerăm cazul general al scripetelui mobil pentru demultiplicarea forței motoare (fig. 11.15), cu cele două ramuri făcând între ele unghiul α .

În acest caz din ecuația de momente în raport cu axa de rotație a scripetelui

$$Pr - Tr = 0 \text{ se deduce } T = P, \quad (11.22)$$

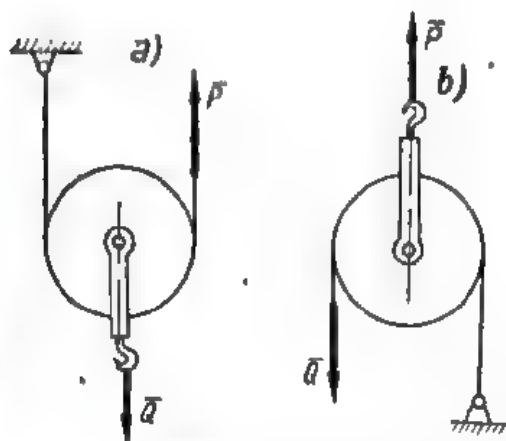


Fig. 11.14

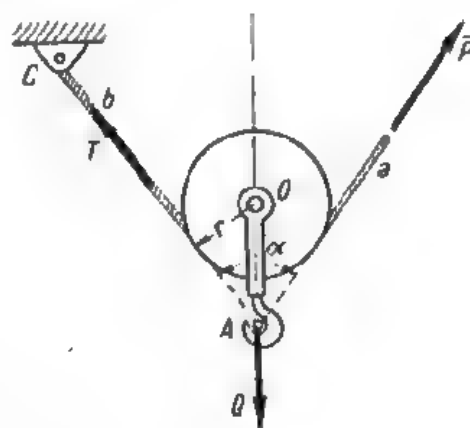


Fig. 11.15

iar din ecuația de proiecție pe direcția forței Q

$$Q - P \cos \frac{\alpha}{2} - T \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{se deduce} \quad P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (11.23)$$

În cazul când forțele P și Q sînt paralele (fig. 11.14, a) $\alpha = 0$ și

$$P = \frac{Q}{2}. \quad (11.24)$$

Scripetele mobil, spre deosebire de scripetele fix, permite să se ridice o greutate Q folosindu-se o forță motoare $P < Q$. Comparînd formulele (11.23) și (11.24) se deduce că se utilizează cea mai mică forță motoare posibilă în cazul $\alpha = 0$, adică atunci cînd forța motoare este verticală.

Dacă se ține seama de frecări și de rigiditatea cablului se poate utiliza formula (11.21) stabilită în cazul scripetelui fix. Rezultă

$$P = kT, \quad P + T = Q, \text{ de unde } P = \frac{kQ}{1+k}. \quad (11.25)$$

§ 8. Sisteme de scripeti. a) Se poate alcătui un sistem de scripeti dintr-un scripete fix și un număr n de scripeti mobili. În fig. 11.16 se arată un astfel de sistem de scripeti cu $n=3$. Notînd cu T_1, T_2, \dots, T_n tensiunile din ramurile cablului care leagă între ei scripetii mobili și ultimul scripete mobil de scripetele fix și folosind formulele stabilite la paragraful precedent, avem

$$T_1 = \frac{k}{1+k} Q, \quad T_2 = \frac{k}{1+k} T_1, \dots, \\ T_n = \frac{k}{1+k} T_{n-1}, \quad P = kT_n.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități, se deduce

$$P = \frac{k^{n+1}}{(1+k)^n} Q. \quad (11.26)$$

În cazul când se neglijează frecările, $k=1$ și formula (11.26) devine

$$P = \frac{Q}{2^n}. \quad (11.27)$$

Faptul că în expresia forței motoare numărul de scripeți n intervine ca exponent, a făcut ca acest sistem de scripeți să fie numit uneori *palan exponențial*.

b) Un alt sistem de scripeți este cel din fig. 11.17. El este alcătuit dintr-un scripete fix și doi scripeți mobili. Relațiile dintre tensiunile T_1, T_2, \dots, T_n și forța P se scrie aplicând formula (11.25)

$$P = T_1 \frac{k}{1+k}, \quad T_1 = T_2 \frac{k}{1+k}, \quad \dots, \quad T_{n-1} = T_n \frac{k}{1+k}.$$

Din acest șir de formule se deduce

$$T_1 = \frac{1+k}{k} P, \quad T_2 = \frac{(1+k)^2}{k^2} P, \quad \dots, \quad T_n = \frac{(1+k)^n}{k^n} P.$$

Tensiunile Q_0, Q_1, \dots, Q_n se vor scrie aplicând formula (11.21)

$$P = kQ_0, \quad T_1 = kQ_1, \quad \dots, \quad T_n = kQ_n.$$

Din aceste formule și din cele precedente se deduce

$$Q_0 = \frac{1}{k} P, \quad Q_1 = \frac{1+k}{k^2} P,$$

$$Q_2 = \frac{(1+k)^2}{k^3} P, \quad \dots, \quad Q_n = \frac{(1+k)^n}{k^{n+1}} P.$$

Ținând seama că

$$Q = Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n,$$

după efectuarea tuturor calculelor rezultă

$$P = \frac{Q}{\frac{(1+k)^{n+1}}{k^{n+1}} - 1}. \quad (11.28)$$

În cazul când nu se ține seama de frecări, $k=1$ și formula (11.28) devine

$$P = \frac{Q}{2^{n+1} - 1}. \quad (11.29)$$

§ 9. Palanul (fig. 11.18). Este un sistem de scripeți alcătuit din două mufe, adică din două grupe de scripeți montate fiecare pe câte o furcă. Una dintre mufe A este fixă, iar de cealaltă B atâră greutatea. Un fir continuu legat de mufa superioară în C este petrecut succesiv peste scripeții celor două mufe. La capătul firului acționează forța motoare P .

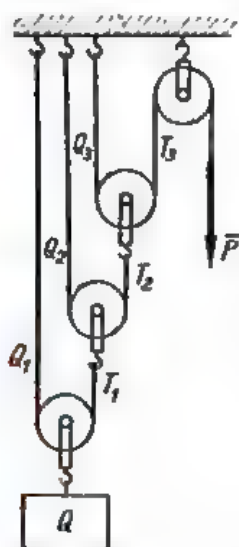


Fig. 11.16

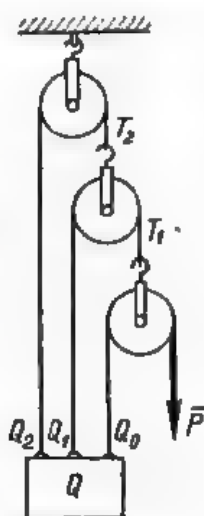
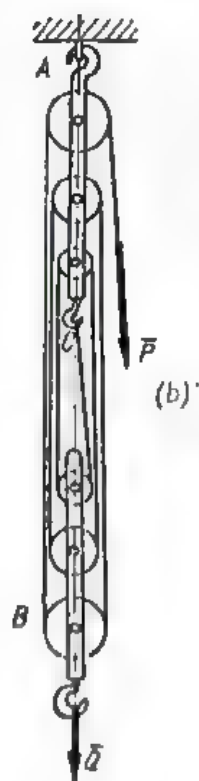


Fig. 11.17



Fig. 11.18



— Presupunând că fiecare mufă are n scripete și notînd cu T_1, T_2, \dots, T_{2n} tensiunile din fiecare ramură a firului, rezultă

$$Q = T_1 + T_2 + \dots + T_{2n},$$

$$P = kT_1, T_1 = kT_2, \dots, T_{n-1} = kT_n, \dots, T_{2n-1} = kT_{2n}.$$

Din aceste relații se deduce

$$T_1 = \frac{1}{k} P, T_2 = \frac{1}{k^2} P, \dots, T_{2n} = \frac{1}{k^{2n}} P$$

și, după efectuarea tuturor calculelor

$$P = \frac{k^{2n}(k-1)}{k^{2n}-1} Q. \quad (11.30)$$

Dacă se neglijează frecările și rigiditatea firelor, formula (11.30) devine

$$P = \frac{Q}{2n}. \quad (11.31)$$

Palanul diferențial este utilizat în practică pentru ridicarea greutăților, folosindu-se în ateliere sub numele de *macara diferențială*.

El se compune dintr-un trolu A și un scripete mobil B (fig. 11.19). Trolul este format din două roți de raze R și r , iar scripetele mobil are raza r_1 . Roțile au profil special pentru lanț, astfel încît, un lanț fără sfîrșit este petrecut peste cele două roți ale trolului și peste scripetele mobil. De scripetele mobil este atîrnată greutatea Q , iar forța motoare P acționează asupra ramurii b a lanțului, cînd voim să ridicăm sarcina Q , sau asupra ramurii a a lanțului, pentru coborîre.

Notînd cu T_1 și T_2 tensiunile din lanț, din ecuațiile de momente în raport cu axele

$$T_1 r_1 - T_2 r_1 = 0, PR + T_2 r - T_1 R = 0,$$



Fig. 11.19

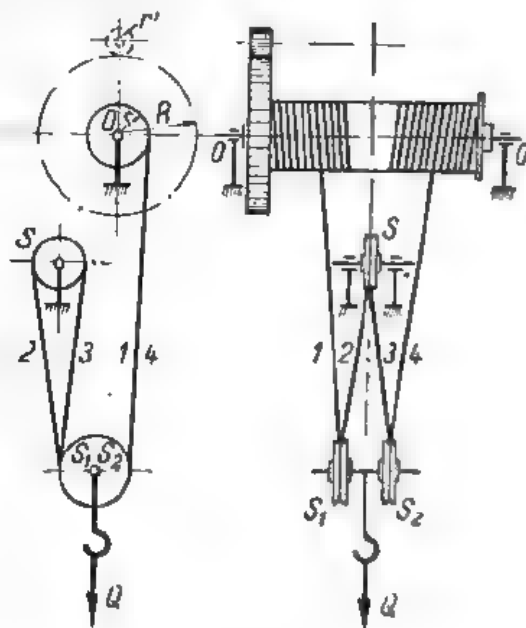


Fig. 11.20

rezultă $T_1 = T_2 = \frac{Q}{2}$ și deci

$$P = \frac{R-r}{2R} Q. \quad (11.32)$$

Raportul de demultiplicare depinde de diferența $R-r$ a razelor celor două roți ale trolului, motiv pentru care palanul a căpătat denumirea de *diferențial*.

Întrucît razele R și r pot avea valori apropiate, raportul de demultiplicare $\frac{R-r}{2R}$ poate atinge valori mici, astfel încît cu o forță motoare mică se poate ridica o sarcină mare.

Exemplu. Să considerăm un palan diferențial avînd $R=200$ mm și $r=180$ mm, cu care vom să ridicăm o sarcină $Q=1\,000$ kgf.

Raportul de demultiplicare este

$$\frac{R-r}{2R} = \frac{1}{20}.$$

Folosind expresia (11.32) se găsește $P=50$ kg.

Palanul dublu este utilizat la mașinile de ridicat acționate mecanic (fig. 11.20).

Cu ajutorul palanului dublu, sarcina Q este ridicată riguros după verticală, în timp ce, cu orice alt sistem de ridicare, sarcina are și o oarecare deplasare orizontală.

Palanul dublu poate fi considerat ca două palane simple, care funcționează concomitent fiecare fiind încărcat cu $Q/2$.

Caracteristica palanului dublu constă în faptul că ambele capete ale cablului sînt fixate de tambur, ramurile 1 și 4 sînt trecute peste scripetii coaxiali S_1 și S_2 și în continuare, ramurile 2 și 3 trec peste scripetele S , care are rolul de a egaliza lungimea celor două ramuri ale cablului.

D. PLANUL ÎNCLINAT

§ 10. **Planul înclinat** (fig. 11.21). Servește la ridicarea și la coborîrea corpurilor. Se știe că pentru a ridica cu viteză constantă pe verticală un corp de greutate Q este necesară o forță $P=Q$. Dacă același corp este însă ridicat pe un plan înclinat față de orizontală sub un unghi α atunci este necesară o forță P , paralelă cu linia de cea mai mare pantă și egală cu

$$P=Q \sin \alpha. \quad (11.33)$$

Această relație între forța motoare și forța rezistentă rezultă imediat, în cazul cînd se neglijează frecările, din ecuația de proiecție pe direcția liniei de cea mai mare pantă a planului.

Dacă se ține seama de frecări, ecuațiile de echilibru, în cazul limită, devin

$$P - Q \sin \alpha - \mu N = 0, \quad N - Q \cos \alpha = 0,$$

din care se deduce

$$P = Q[\sin \alpha + \mu \cos \alpha] = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (11.34)$$

unde prin φ s-a notat unghiul de frecare ($\operatorname{tg} \varphi = \mu$). Comparînd formulele (11.33) și (11.34) se observă că în cazul unui plan aspru este necesară o forță activă P mai mare decît în cazul unui plan luciu ($\mu=0$).

Din formula (11.33) rezultă că întotdeauna $P < Q$. Din formula (11.34) rezultă că, pentru ca $P < Q$ este necesar ca $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} < 1$ sau $\sin(\alpha + \varphi) < \sin(90^\circ - \varphi)$, sau încă

$$\alpha + 2\varphi < 90^\circ. \quad (11.35)$$

În cazul cînd condiția (11.35) nu este îndeplinită, $P > Q$ și forța necesară pentru a ridica corpul pe planul înclinat este mai mare decît aceea necesară pentru a-l ridica pe verticală; planul înclinat își pierde avantajul.

Cînd planul înclinat servește la coborîrea greutăților, atunci sensul de alunecare este cel descendent. Formula (11.33) nu suferă nici o schimbare. Formula (11.34) devine

$$P = Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (11.36)$$

Formula (11.36) dă mărimea necesară a forței P pentru a împiedica corpul de greutate Q să alunece în jos.

În cazurile când $\alpha \leq \varphi$ valoarea dată de (11.36) este negativă sau nulă. În aceste cazuri corpul de greutate Q se autofixează pe plan. Forțele de frecare sunt suficiente pentru a asigura

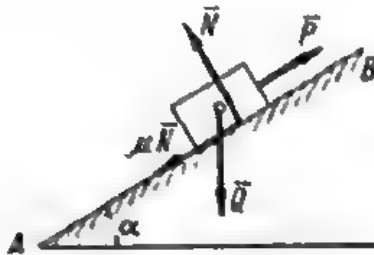


Fig. 11.21

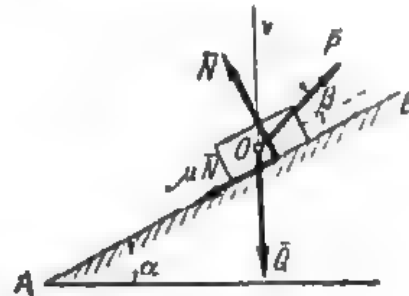


Fig. 11.22

aceasta. Când $\alpha = \varphi$, $P = 0$. Rezultă că, la cel mai mic deranjament, corpul începe să alunece. Când $\alpha < \varphi$, $P < 0$. Rezultă că, pentru a face corpul să alunece este necesar să se exercite o forță paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului, dirijată în sens descendent.

În cazul când forța P nu este paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului, ci face un unghi β cu aceasta (fig. 11.22), ecuațiile de echilibru se scriu

$$P \cos \beta - Q \sin \alpha - \mu N = 0, \quad N - Q \cos \alpha + P \sin \beta = 0,$$

din care

$$P = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} Q = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos (\beta - \varphi)} Q. \quad (11.37)$$

Formula (11.37) dă valoarea forței P necesară pentru a ridica corpul de greutate Q pe planul inclinat. În cazul când planul inclinat servește pentru coborîrea greutăților Q , se obține

$$P_1 = \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (\beta + \varphi)} Q. \quad (11.38)$$

Condiția de autofixare rămîne, ca și în cazul precedent

$$\alpha \leq \varphi. \quad (11.39)$$

Forța P_1 dată de (11.38) este mai mică decît forța P dată de (11.37) deoarece diferența lor

$$P - P_1 = \frac{\sin 2\varphi \cos (\alpha + \beta)}{\cos (\beta - \varphi) \cos (\beta + \varphi)} Q$$

este o cantitate pozitivă, atît timp cît $\alpha + \beta < 90^\circ$, ceea ce are loc întotdeauna, deoarece pentru a menține corpul în echilibru, forța P trebuie să se găsească la dreapta verticalei OV .

Adesea planul inclinat se combină cu un troliu, ca în fig. 11.23. Notăm cu $\mu = \tan \varphi$ coeficientul de frecare dintre corp și planul inclinat, cu μ_1 coeficientul de frecare la fusul troliului, cu r raza tamburului pe care se înfășoară cablul, cu R raza roții la extremitatea căreia acționează forța P și cu a raza fusului.

Se consideră că se taie cablul și se scrie separat echilibrul corpului pe planul inclinat și echilibrul troliului.

Cînd tendința mișcării corpului este în sensul urcării pe planul inclinat

$$T = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} Q, \quad PR = Tr + \mu_1 N_1 a,$$

unde $N_1 = \sqrt{P^2 + T^2 + 2PT \sin \alpha}$, iar P are valoarea P_{\max} .

Cind tendința mișcării este în sensul coborîrli pe plan

$$T = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} Q, \quad PR = Tr - \mu_1 N_1 a.$$

În acest caz P are valoarea P_{min} .

Principiul planului înclinat este folosit în practică sub forme variate: transportoare gravitaționale, tobogamuri, elevatoare oblice, funiculare pe șine etc.

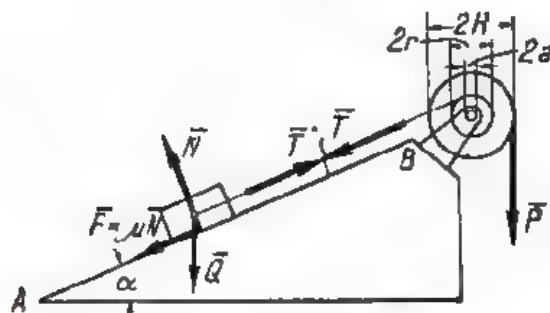


Fig. 11.23

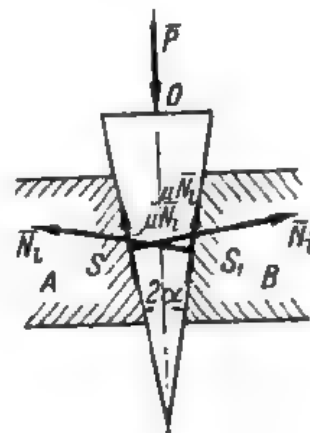


Fig. 11.24

§ 11. Pana (fig. 11.24). Este un organ de îmbinare demontabil avînd forma unei prisme triunghiulare care se introduce între două piese A și B . Pana acționează asupra pieselor A și B prin presiunile și forțele de frecare pe care le exercită pe fețele ei laterale. Dacă se notează cu 2α unghiul la vîrf, cu P forța de acționare, cu N_1 și μN_1 respectiv reacțiunea normală și cea de frecare într-un punct oarecare al suprafeței laterale a penei, ecuația de proiecție pe direcția forței P este

$$P = 2 \sum N_1 \sin \alpha + 2 \sum \mu N_1 \cos \alpha = 2 (\sum N_1) (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Forța cu care pana împinge lateral una dintre piesele A sau B este

$$Q = \sum N_1 \cos \alpha - \sum \mu N_1 \sin \alpha = (\sum N_1) (\cos \alpha - \mu \sin \alpha).$$

Din expresiile găsite pentru P și Q se deduce prin împărțire:

$$P = 2 \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} Q = 2Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (11.40)$$

Din această formulă rezultă că, cu cît α și φ sînt mai mici, cu atît se realizează o presiune mai mare Q , cu o aceeași forță P .

În cazul cînd se scoate pana dintre cele două piese A și B , sensul forțelor de frecare se schimbă și forța P necesară este

$$P = 2Q \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \quad (11.41)$$

Pentru ca pana să rămînă autofixată după batere este necesar ca valoarea sarcinii P dată de (11.41) să fie nulă sau negativă, adică $\alpha \leq \varphi$.

E. ȘURUBUL

§ 12. Șurubul (fig. 11.25). Este alcătuit dintr-un cilindru circular drept pe suprafața laterală a căruia este săpat un șanț, numit *filet*, în forma unei elice circulare. Dacă se consideră desfășurată suprafața laterală a cilindrului (fig. 12.13), se poate verifica ușor că între panta $\text{tg } \alpha$ a elicei, raza r a cilindrului și pasul p al elicei există relația simplă

$$\text{tg } \alpha = \frac{p}{2\pi r} \quad (11.42)$$

Șurubul se înșurubează într-o piesă denumită *piuliță*, care are un gol cilindric pe suprafața căruia este săpat un filet de asemenea elicoidal, având aceleași elemente geometrice ca și filetul șurubului.

Mișcarea relativă a șurubului față de piuliță este o mișcare elicoidală particulară, numită *mișcare de șurub*, caracterizată prin aceea că viteza de înaintare este proporțională cu viteza unghiulară de rotație.

Există cazuri când piulița este fixă, iar șurubul are o mișcare elicoidală (de exemplu presa cu șurub, șurubul de presiune), cazuri când șurubul este fix și piulița are o mișcare elicoidală (de exemplu șuruburile de asamblare), cazuri când piulița are mișcare de rotație, iar șurubul mișcare de translație (de exemplu șurubul binoculului) și cazuri când șurubul are mișcare de rotație și piulița mișcare de translație (de exemplu șurubul conducător de la strung).

În cele ce urmează se va presupune piulița fixă și șurubul mobil. Rezultatele care vor fi stabilite sînt valabile și în toate celelalte cazuri.

Asupra șurubului acționează:

- la una dintre extremități un cuplu motor de moment M , al cărui vector este colinar cu axa șurubului (de exemplu în cazul când șurubul este rotit cu o cheie de braț l la capătul căreia acționează o forță P , momentul $M = Pl$);

- la cealaltă extremitate o forță rezistentă Q avînd direcția axei șurubului și sensul opus celui de înaintare al șurubului;

- în lungul filetului său, în fiecare punct A_i de contact cu filetul piuliței, o forță de presiune din partea acestuia, care poate fi descompusă într-o componentă N_i , normală la filet și o componentă μN_i tangențială la filet și dirijată în sens invers sensului de deplasare al filetului șurubului față de acela al piuliței.

Dacă se caută numai relația dintre momentul motor M și forța rezistentă Q , este suficient să se scrie ecuația de proiecție pe axa șurubului și ecuația de momente în raport cu această axă.

Acste ecuații sînt:

$$Q - \sum N_i \cos \alpha + \sum \mu N_i \sin \alpha = 0,$$

$$M - \sum r N_i \sin \alpha - \sum r \mu N_i \cos \alpha = 0,$$

Ele se mai scriu, considerînd μ constant în lungul filetului

$$Q = (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \sum N_i,$$

$$M = r(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \sum N_i,$$

de unde prin împărțire

$$M = Qr \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = Qr \text{tg}(\alpha + \varphi). \quad (11.43)$$

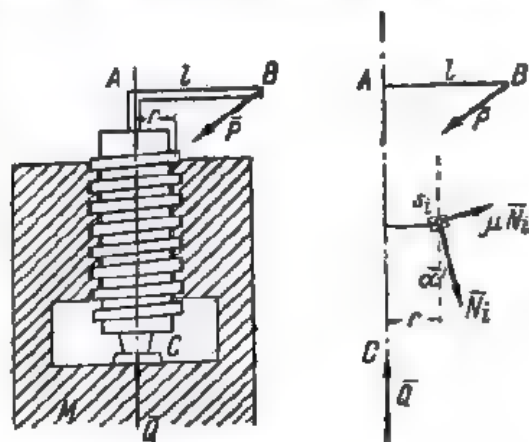


Fig. 11.25

Formula (11.43) arată legătura între momentul motor și forța rezistentă, atunci când are loc „înșurubarea”. La „deșurubare” sensul forțelor de frecare se schimbă și formula (11.43) devine

$$M = Qr \operatorname{tg} (\alpha - \varphi). \quad (11.44)$$

Pentru ca șurubul să se autofixeze este necesar ca valoarea momentului, dată de (11.44), să fie negativă sau nulă, cu alte cuvinte pentru deșurubare, este necesar un moment de sens opus celui care a produs înșurubarea. Această condiție este realizată, indiferent de forța de strângere Q , dacă $\alpha \leq \varphi$.

În exemplul arătat în fig. 11.25 s-a considerat că asupra șurubului acționează o forță P normală pe manivela AB . Dacă forța P face cu AB un unghi diferit de 90° , ea va produce presarea șurubului pe fața laterală a piuliței și va rezulta o frecare de care trebuie să se țină seama. Se evită aceasta acționând asupra șurubului cu un cuplu al cărui plan este normal la axa șurubului.

PARTEA A TREIA
CINEMATICA

XII. CINEMATICA PUNCTULUI

A. GENERALITĂȚI, DEFINIȚII

§ 1. **Generalități.** Problema centrală a cinematicii ($\kappaίνημα$ = mișcare) este studiul mișcării mecanice a sistemelor de puncte, fără a se ține seama de masele acestor puncte și de forțele care acționează asupra lor.

În cinematică se folosesc noțiunile fundamentale de spațiu și de timp. În mecanica clasică se presupune că spațiul este: absolut, euclidian și tridimensional; iar timpul: absolut, avînd caracterul unui parametru continuu unidimensional, independent de spațiu și de orice altă mărime.

Mișcarea unui sistem de puncte se raportează în general la un reper, care este presupus, în mod convențional, „fix”. Orice reper, solidar cu reperul fix este considerat de asemenea fix. Orice alt reper care nu este solidar cu reperul fix este considerat „mobil”. Mișcarea sistemului de puncte în raport cu un reper fix se numește *mișcare absolută*, iar mișcarea aceluiași sistem față de un reper mobil se numește *mișcare relativă*.

În cele ce urmează se va studia în prealabil mișcarea în raport cu un reper fix și apoi mișcarea în raport cu un reper mobil. Se va analiza, de fiecare dată, mai întîi cazul unui singur punct și apoi cazul unui sistem de puncte. Dintre sisteme, se vor cerceta mai amănunțit sistemele rigide (corpurile rigide).

§ 2. **Mișcarea punctului.** Mișcarea unui punct față de un reper fix este definită atunci cînd este posibil să se determine la orice moment t poziția punctului. În general vom presupune că se definește vectorul de poziție \vec{r} al punctului față de originea O a reperului, ca funcție de timp

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (12.1)$$

Funcția vectorială, definită de (12.1) trebuie să satisfacă, în intervalul de timp în care este valabilă, anumite restricții impuse de fenomenul fizic al mișcării punctului. Astfel, ea trebuie să fie *continuuă*, *uniformă* (deoarece punctul material nu poate ocupa simultan mai multe poziții distincte în spațiu), *finită în modul* și *derivabilă* (primele două derivate definesc două mărimi fizice, viteza și accelerația punctului la momentul t).

Cu toate aceste restricții, clasa funcțiilor (12.1) este foarte cuprinzătoare.

Definirea vectorului de poziție \vec{r} poate fi făcută în general cu ajutorul a trei funcții scalare. Astfel, dacă se folosesc coordonate carteziane, cunoaș-

terea vectorului $\vec{r}=\vec{r}(t)$ echivalează cu cunoașterea abscisei, ordinatei și cotei punctului, ca funcții scalare de timp, adică

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \quad (12.2)$$

Dacă se folosesc coordonate cilindrice, cunoașterea vectorului $\vec{r}=\vec{r}(t)$ echivalează cu cunoașterea razei polare r , a unghiului polar θ și a cotei z , ca funcții scalare de timp, adică

$$r=r(t), \quad \theta=\theta(t), \quad z=z(t). \quad (12.3)$$

Dacă se folosesc coordonate sferice, cunoașterea vectorului $\vec{r}=\vec{r}(t)$ echivalează cu cunoașterea razei vectoriale r , a azimutului θ și a longitudinii φ ca funcții de timp, adică

$$r=r(t), \quad \theta=\theta(t), \quad \varphi=\varphi(t). \quad (12.4)$$

În general, dacă se folosesc coordonatele, q_1 , q_2 și q_3 , care determină biunivoc poziția punctului, cunoașterea vectorului $\vec{r}=\vec{r}(t)$, echivalează cu cunoașterea funcțiilor scalare q_1 , q_2 , q_3 , adică

$$q_1=q_1(t), \quad q_2=q_2(t), \quad q_3=q_3(t). \quad (12.5)$$

În cele ce urmează, se va folosi forma (12.1) la studiul proprietăților generale ale mișcării. În aplicații vom folosi alături de forma (12.1), una dintre formele echivalente (12.2), (12.3), (12.4) sau (12.5).

§ 3. **Traiectorie.** Locul geometric al pozițiilor succesive pe care le ocupă punctul în mișcare se numește *traiectorie*.

Ecuațiile (12.2), (12.3), (12.4) sau (12.5) pot fi considerate ca fiind ecuații parametrice ale traiectoriei.

În unele probleme de cinematică se cunoaște traiectoria. În acest caz, dacă traiectoria este o curbă continuă, rectificabilă și are în orice punct o tangentă unică, mișcarea punctului material poate fi definită, printr-o singură ecuație scalară, în felul următor:

Se alege pe curbă un punct arbitrar A_0 . Un punct oarecare A poate fi definit prin valoarea s a arcului A_0A . Pentru ca să existe o corespondență biunivocă între arcul s și poziția punctului A este necesar să se stabilească pe traiectorie un sens pozitiv de măsurare a arcelor. O dată această convenție făcută, mișcarea mobilului este definită dacă se cunoaște legea de variație a arcului s în funcție de timpul t

$$s=s(t). \quad (12.6)$$

Ecuația (12.6) se numește *ecuația orară* a mișcării.

§ 4. **Invarianții mișcării unui punct față de schimbarea reperului.** Să considerăm un reper fix față de care, mișcarea unui punct material este definită prin legea $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Schimbând reperul, vectorul de poziție, care va defini mișcarea față de noul reper fix va fi

$$\vec{r}_1(t)=\vec{r}_0+\vec{r}(t), \quad (12.7)$$

unde prin $\bar{r}_1(t)$ s-a notat noul vector de poziție, iar prin r_0 vectorul O_1O care unește originile celor două repere fixe. Vectorul \bar{r}_0 nu depinde, evident, de timpul t , deoarece O și O_1 sînt două puncte fixe. Se pot obține invarianți ai mișcării dacă se elimină vectorul \bar{r}_0 din (12.7). Această eliminare se poate realiza prin derivări succesive ale acestei relații, în raport cu timpul. Se obține

$$\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}, \quad \ddot{\bar{r}}_1 = \ddot{\bar{r}}, \quad \dddot{\bar{r}}_1 = \dddot{\bar{r}} \text{ etc. } \dots \quad (12.8)$$

Conchidem că toate derivatele vectorului de poziție în raport cu timpul sînt invariante față de schimbările de reper fix.

Proprietățile intrinseci ale mișcării unui punct material sînt determinate de invarianții (12.8). Primii doi invarianți

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}, \quad (12.9)$$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}, \quad (12.10)$$

care se numesc respectiv *viteza* și *acelerația* mobilului la momentul t , intervin în formularea principiilor dinamicii.

§ 5. Viteza medie. Viteza la un moment dat. Să presupunem că la momentul t mobilul se găsește în A , iar la momentul $t + \Delta t$ în A_1 (fig. 12.1).

Să notăm cu Δs lungimea arcului de curbă AA_1 . Se numește *viteză medie* în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ raportul dintre lungimea arcului Δs și durata Δt , adică

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (12.11)$$

Viteza medie depinde de perechea de puncte A, A_1 , care se consideră pe traiectoria mobilului. Această mărime ne dă o idee destul de vagă despre mișcarea punctului. Pentru a obține o precizie a acestei noțiuni considerăm punctul A fix și facem ca Δt și Δs să tindă către zero. În acest caz raportul $\Delta s / \Delta t$ tinde în general către o limită (presupunem funcția $s = s(t)$ continuă și derivabilă), iar formula (12.11) devine

$$v_A = \frac{ds}{dt}. \quad (12.12)$$

Mărimea scalară definită de (12.12) caracterizează *viteza mobilului* în A . Această mărime scalară poate fi transformată într-o mărime vectorială dacă convenim să se atribuie vitezei din A direcția tangentei din acest punct, iar ca sens acela considerat pozitiv pentru arcele s . În acest caz, viteza în A va fi definită prin vectorul

$$\bar{v}_A = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}, \quad (12.13)$$

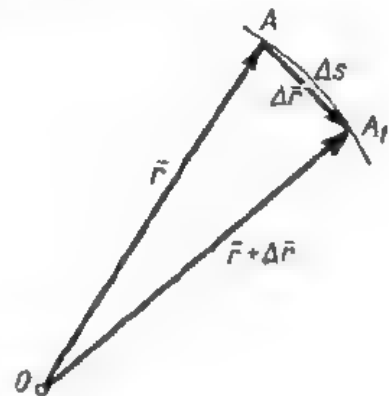


Fig. 12.1

în care s-a notat cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei în A la traiectorie. Sensul vectorului $\bar{\tau}$ coincide cu sensul pozitiv ales pentru arcul s .

Se poate arăta că relația de definiție a vitezei în A (12.13) coincide cu relația de definiție a aceleiași mărimi (12.9), dată la paragraful precedent.

Într-adevăr, să considerăm (fig. 12.1) vectorii \bar{r} și $\bar{r} + \Delta\bar{r}$ care caracterizează pozițiile A și A_1 ale mobilului. Se poate scrie

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}, \quad (12.14)$$

deoarece:

— vectorul $\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}$ este un vector unitar care are direcția coardei AA_1 .

La limită coarda tinde către tangenta în A , deci vectorul $\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}$ tinde către $\bar{\tau}$;

— raportul $\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s}$ este raportul dintre lungimea coardei AA_1 și aceea a arcului corespunzător. Acest raport, la limită, tinde către unitate, deoarece curba a fost presupusă rectificabilă;

— raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tinde la limită către $\frac{ds}{dt}$.

Unități de măsură. Din definiție rezultă că ecuația dimensională a vitezei se va scrie

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Unitatea de măsură pentru viteză va fi egală cu unitatea de măsură pentru lungime divizată prin unitatea de măsură pentru timp.

În sistemul CGS viteza se măsoară în centimetri pe secundă, iar în sistemul SI, viteza se măsoară în metri pe secundă.

§ 6. Accelerația. Să considerăm din nou mobilul în cele două poziții A și A_1 și să presupunem că vitezele corespunzătoare sînt \bar{v} și $\bar{v} + \Delta\bar{v}$. Mărimea $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ caracterizează variația vectorului viteză în unitatea de timp. Această mărime depinde de perechea de puncte A și A_1 aleasă și ne dă o noțiune destul de vagă asupra variației vectorului viteză. Pentru a o preciza vom presupune punctul A fix și vom trece la limită făcînd Δt și $\Delta\bar{v}$ să tindă către zero. Dacă se admite că vectorul \bar{v} este o funcție continuă și derivabilă de timp, raportul $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ va tinde către o limită, care se numește *accelerația mobilului în punctul A*

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (12.15)$$

Unități de măsură. Din definiție rezultă că ecuația dimensională a accelerației va fi

$$[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}.$$

Unitatea de măsură pentru accelerație va fi deci egală cu unitatea de măsură pentru lungime, divizată prin pătratul unității de măsură pentru timp. În sistemul CGS accelerația se măsoară în centimetri pe secundă la pătrat, iar în sistemul SI în metri pe secundă la pătrat.

§ 7. **Hodograful vitezei.** Se consideră un punct arbitrar O în spațiu, în care se aplică un vector echipolent cu vectorul viteză. Când mobilul descrie traiectoria (Γ) , vârful vectorului viteză, aplicat în O descrie o curbă (γ) . Această curbă poartă numele de *hodograful vitezei* (fig. 12.2).

Cu ajutorul hodografului se poate da o interpretare interesantă accelerației unui mobil într-un punct. Dacă se consideră două poziții apropiate A_1 și A_2 ale mobilului pe traiectoria (Γ) , vitezele lor corespunzătoare \vec{v} și $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, punctele B_1 și B_2 corespunzătoare pe hodograful (γ) , atunci viteza extremității B a vectorului \vec{v} pe hodograf va fi

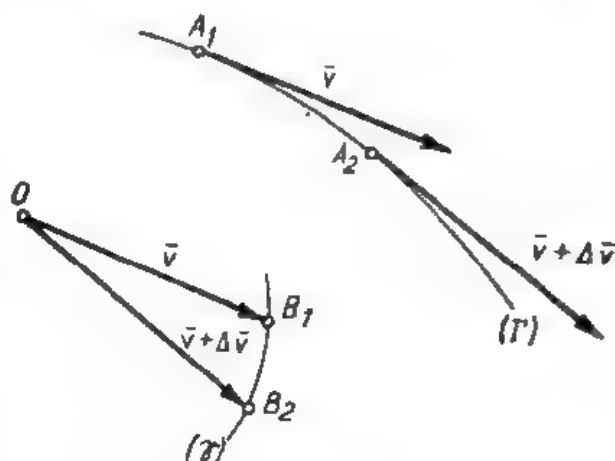


Fig. 12.2

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_1 B_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \vec{a},$$

adică *accelerația mobilului pe traiectoria (Γ) este egală cu viteza extremității vectorului viteză pe hodograful (γ) .*

§ 8. **Aproximarea mișcării unui punct în vecinătatea unei poziții.**

Deviație. S-a presupus că funcția $\vec{r} = \vec{r}(t)$ care definește mișcarea unui punct, este continuă și derivabilă de două ori, derivatele ei fiind și ele continue. Aceasta permite să se dezvolte în serie Taylor sub forma

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \cdot \dot{\vec{r}}(t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \cdot \ddot{\vec{r}}(t) + \varepsilon(t, \Delta t). \quad (12.16)$$

Relația (12.16) ne permite să aproximăm mișcarea unui punct în vecinătatea unei poziții A . Pentru intervale de timp Δt foarte mici, mișcarea curbilinie poate fi înlocuită cu aceea a unui mobil fictiv care s-ar mișca după legea

$$AA' = \Delta t \cdot \dot{\vec{r}}(t), \quad (12.17)$$

Deoarece $\dot{\vec{r}}(t)$ este un vector tangent la traiectorie, rezultă că mișcarea are loc pe tangenta la curbă. Considerând t — const și Δt — variabil, rezultă că viteza mobilului fictiv este

$$\frac{dAA'}{d(\Delta t)} = \dot{\vec{r}}(t),$$

deci constantă. O asemenea mișcare se numește *mișcare rectilinie și uniformă*.

În concluzie, o mișcare curbilinie poate fi asimilată, în vecinătatea de ordinul întâi a punctului A , cu o mișcare rectilinie și uniformă, pe tangenta în A la traiectorie, având viteza egală cu viteza din A a mobilului.

În vecinătatea de ordinul al doilea [pentru valori Δt mai mari, dar totuși suficient de mici, ca $\bar{\varepsilon}(t, \Delta t)$ să fie neglijabil] este necesar să se introducă o corecție sub forma mișcării unui mobil fictiv care se face după legea

$$\overline{A'A''} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \ddot{r}(t). \quad (12.18)$$

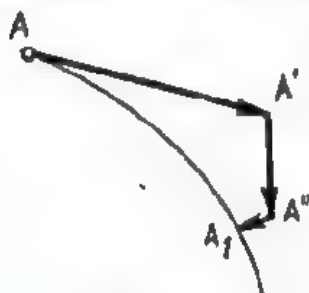


Fig. 12.3

Traectoria acestei mișcări este o dreaptă avind aceeași direcție ca $\ddot{r}(t)$. Considerînd și de data aceasta timpul t constant și intervalul de timp Δt variabil, pentru viteza și accelerația mobilului fictiv obținem expresiile

$$\frac{d\overline{A'A''}}{d(\Delta t)} = \Delta t \ddot{r}(t), \quad \frac{d^2\overline{A'A''}}{d(\Delta t)^2} = \ddot{r}(t).$$

O asemenea mișcare, cu accelerație constantă, poartă numele de *mișcare rectilinie uniform variată*.

În concluzie, o mișcare curbilinie poate fi asimilată în vecinătatea de ordinul al doilea a punctului A , cu două mișcări rectilinii: una, uniformă pe tangenta la traiectorie, cu viteza din A a mobilului și a doua, uniform variată cu accelerația din A a mobilului.

Vectorul $\overline{A'A''}$ poartă numele de *deviație*.

În fig. 12.3 au fost desenate segmentele $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$ și $\overline{A''A_1}$. Ultimul segment, $\overline{A''A_1} = \bar{\varepsilon}(t, \Delta t)$, unește punctul A'' cu punctul A_1 de pe curbă, în care se găsește mobilul în momentul $t + \Delta t$.

B. COMPONENTELE VITEZEI ȘI ACCELERAȚIEI ÎN DIFERITE SISTEME DE COORDONATE

§ 9. Sistemul de coordonate carteziene. Într-un sistem de coordonate carteziene (fig. 12.4) vectorul de poziție este definit prin coordonatele x , y și z ale punctului. Cunoașterea mișcării punctului revine la cunoașterea acestor coordonate ca funcții de timp

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Aceste ecuații pot fi considerate că definesc parametric traiectoria (Γ) . Dacă se elimină timpul, ecuațiile traiectoriei mai pot fi scrise și sub forma implicită

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Vectorul de poziție r se va scrie

$$r = xi + yj + zk.$$

Viteza \vec{v} se deduce prin derivarea vectorului de poziție în raport cu timpul

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (12.19)$$

Accelerația \vec{a} se deduce derivând de două ori vectorul de poziție în raport cu timpul

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (12.20)$$

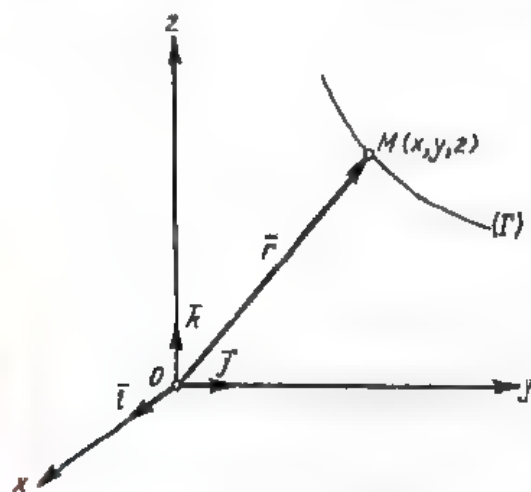


Fig. 12.4

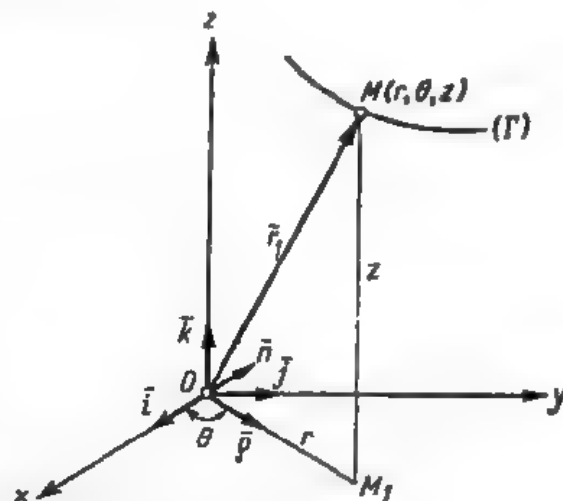


Fig. 12.5

În aceste derivări s-a ținut seama că axele triedrului fiind fixe, versorii lor \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} sînt constanți, deci $\dot{\vec{i}} = \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{k}} = 0$.

Din relațiile (12.19) și (12.20) deducem proiecțiile pe axe ale vectorilor viteză și accelerație

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, & v_y &= \dot{y}, & v_z &= \dot{z}, \\ a_x &= \ddot{x}, & a_y &= \ddot{y}, & a_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (12.21)$$

§ 10. Sistemul de coordonate cilindrice. În sistemul de coordonate cilindrice (fig. 12.5), vectorul de poziție \vec{r}_1 este definit de coordonatele θ (unghiul polar), r (raza polară) și z (cota). Cunoașterea mișcării punctului revine la cunoașterea funcțiilor

$$r = r(t) \quad \theta = \theta(t) \quad z = z(t).$$

Acste ecuații pot fi considerate ca ecuații parametrice ale mișcării. Direcțiile pe care se proiectează sînt: a) direcția razei polare OM_1 caracterizată prin versorul $\vec{\rho}$, b) direcția normală la raza polară din planul xOy , caracterizată prin versorul \vec{n} și c) direcția axei Oz caracterizată prin versorul \vec{k} .

Se observă că versorul \vec{k} este constant, deci $\dot{\vec{k}} = 0$, iar ceilalți doi versori, $\vec{\rho}$ și \vec{n} sînt mobili. Se pot calcula derivatele lor, în raportul cu timpul, calculînd proiecțiile lor pe axele fixe de versori \vec{i} și \vec{j} .

Obținem

$$\bar{\rho} = \cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}, \quad \bar{n} = -\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j},$$

de unde, prin derivare,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= -\sin \theta \cdot \dot{\theta} \bar{i} + \cos \theta \cdot \dot{\theta} \bar{j} = \dot{\theta} \bar{n}, \\ \dot{\bar{n}} &= -\cos \theta \cdot \dot{\theta} \bar{i} - \sin \theta \cdot \dot{\theta} \bar{j} = -\dot{\theta} \bar{\rho}. \end{aligned} \quad (12.22)$$

Vectorul de poziție \bar{r}_1 se va scrie

$$\bar{r}_1 = r\bar{\rho} + z\bar{k}.$$

Viteza se obține prin derivarea vectorului de poziție \bar{r}_1 în raport cu timpul

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}_1 = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\bar{\rho}} + \dot{z}\bar{k} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{n} + \dot{z}\bar{k}. \quad (12.23)$$

Accelerația se obține derivând de două ori vectorul de poziție în raport cu timpul

$$\begin{aligned} \bar{a} = \ddot{\bar{r}}_1 &= \ddot{r}\bar{\rho} + \dot{r}\dot{\bar{\rho}} + \dot{r}\dot{\theta}\bar{n} + \dot{r}\ddot{\theta}\bar{n} + r\ddot{\theta}\bar{n} + \dot{z}\bar{k} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{\rho} + \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{n} + \ddot{z}\bar{k}. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Din (12.23) și (12.24) deducem componentele vitezei și accelerației în coordonatele cilindrice

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r}, \quad v_n = r\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z}, \\ a_\rho &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Observație. În cazul unei mișcări a mobilului în planul coordonatelor r, θ (coordoneate polare) rezultă

$$z=0, \quad v_z=0 \quad \text{și} \quad a_z=0,$$

și obținem

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r}, \quad v_n = r\dot{\theta}, \\ a_\rho &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_n = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Se poate defini o mărime care caracterizează creșterea ariei sectoriale, cuprinsă între două raze vectoriale și arcul de traiectorie cînd mobilul descrie traiectoria. Ea se numește *viteză arcolară* Ω .

Se consideră pentru aceasta aria sectorială A la momentul t și la momentul $t + \Delta t$. Creșterea ariei, ΔA , este reprezentată în fig. 12.6 prin aria triunghiului curbiliniu OMM_1 . S-a presupus că derivata $\dot{r}(t)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătatea punctului M , astfel încît se

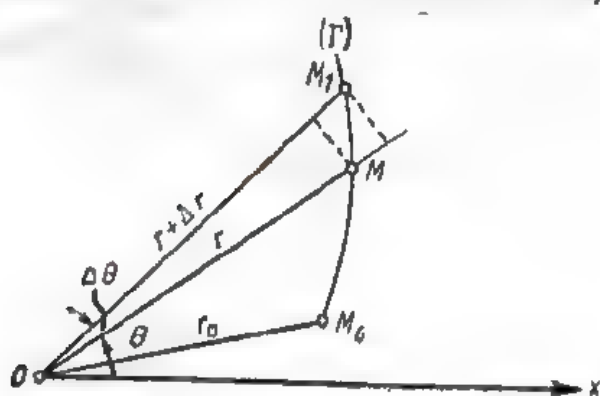


Fig. 12.6

poate alege un arc MM_1 pe care funcția $r(t)$ să fie monotonă, de exemplu, în cazul fig. 12.6, monoton crescătoare. Se observă că

$$\frac{r^2 \Delta \theta}{2} < \Delta A < \frac{(r + \Delta r)^2 \Delta \theta}{2}.$$

Împărțind cu timpul Δt și trecând la limită putem scrie

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r^2 \Delta \theta}{2 \Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(r + \Delta r)^2 \Delta \theta}{2 \Delta t}.$$

Cum

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r^2 \Delta \theta}{2 \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(r + \Delta r)^2 \Delta \theta}{2 \Delta t} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2},$$

rezultă pentru viteza areolară expresia

$$\Omega = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2}. \quad (12.27)$$

Observație. Se poate arăta că viteza areolară Ω are ca valoare absolută jumătate din modulul produsului vectorial $\vec{r} \times \vec{v}$. Într-adevăr

$$\vec{r} \times \vec{v} = r \vec{\rho} \times (v_{\rho} \vec{\rho} + v_n \vec{n}) = r v_n \vec{\rho} \times \vec{n} = r^2 \dot{\theta} \vec{k}.$$

Rezultă

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = |r^2 \dot{\theta}| = 2 |\Omega|,$$

de unde

$$|\Omega| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|. \quad (12.28)$$

§ 11. Coordonate sferice.

Vectorul de poziție este definit în acest caz prin raza vectorie \vec{r} , azimutul θ și longitudinea φ (fig. 12.7). Mișcarea este definită, când se cunosc funcțiile

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

care pot fi privite ca ecuații parametriche ale traiectoriei. Proiecțiile vitezei și accelerației se vor calcula pe:

- a) direcția razei vectorie OM orientată de versorul $\vec{\rho}$;
- b) direcția tangentei la paralela care trece prin M , orientată de versorul \vec{n} ;
- c) direcția tangentei la meridianul care trece prin M , orientată de versorul $\vec{\mu}$.

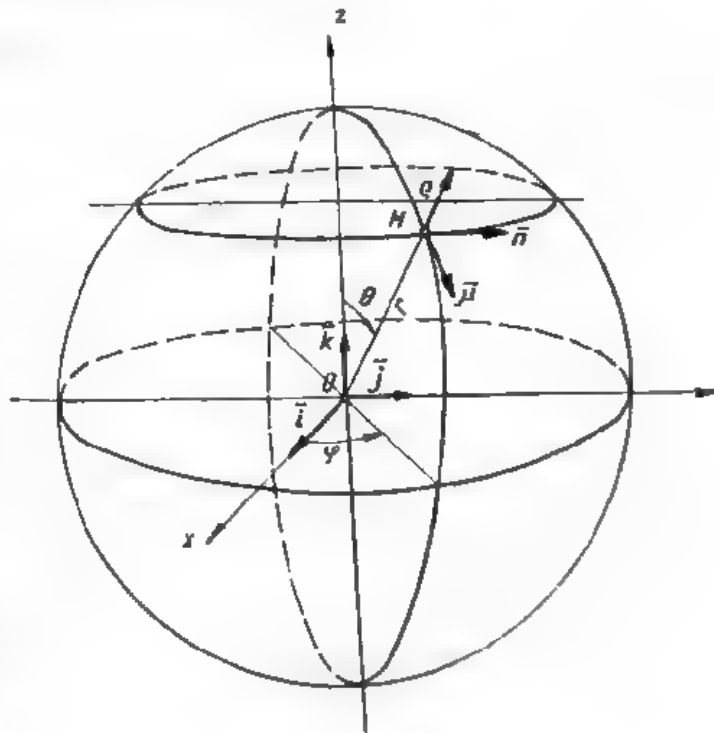


Fig. 12.7

Se observă că toți acești versori sînt variabili. Pentru a calcula derivatele lor în raport cu timpul, îi vom proiecta pe axele fixe Ox , Oy , și Oz . Obținem

$$\bar{\rho} = \sin \theta \cos \varphi \bar{i} + \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k},$$

$$\bar{n} = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j},$$

$$\bar{\mu} = \cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \cos \theta \sin \varphi \bar{j} - \sin \theta \bar{k}.$$

Prin derivare în raport cu timpul rezultă

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \bar{i} + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \bar{j} - \dot{\theta} \sin \theta \bar{k} - \\ &- \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \bar{i} + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \bar{j} = \dot{\theta} \bar{\mu} + \dot{\varphi} \sin \theta \bar{n}, \\ \dot{\bar{n}} &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \bar{i} - \dot{\varphi} \sin \varphi \bar{j} = -\dot{\varphi} \sin \theta \bar{\rho} - \dot{\varphi} \cos \theta \bar{\mu}, \\ \dot{\bar{\mu}} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi \bar{i} - \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \bar{j} - \dot{\theta} \cos \theta \bar{k} - \\ &- \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \bar{i} + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \bar{j} = -\dot{\theta} \bar{\rho} + \dot{\varphi} \cos \theta \bar{n}. \end{aligned} \quad (12.29)$$

În coordonate sferice, vectorul de poziție poate fi scris sub forma

$$\bar{r} = r \bar{\rho}.$$

Viteza se obține prin derivarea vectorului \bar{r} în raport cu timpul

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r} \bar{\rho} + r \dot{\bar{\rho}} = \dot{r} \bar{\rho} + r \dot{\theta} \bar{\mu} + r \dot{\varphi} \sin \theta \bar{n}. \quad (12.30)$$

Accelerația se obține derivînd vectorul viteză (12.30). Ținînd seama de (12.29) obținem

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \ddot{r} \bar{\rho} + \dot{r} \dot{\bar{\rho}} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{\mu} + r \ddot{\theta} \bar{\mu} + [\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + \\ &+ r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta] \bar{n} + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\bar{n}} = \ddot{r} \bar{\rho} + \dot{r} (\dot{\theta} \bar{\mu} + \dot{\varphi} \sin \theta \bar{n}) + \\ &+ (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{\mu} + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \bar{\rho} + \dot{\varphi} \cos \theta \bar{n}) + [\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + \\ &+ r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta] \bar{n} - r \dot{\varphi} \sin \theta [\dot{\varphi} \sin \theta \bar{\rho} + \dot{\varphi} \cos \theta \bar{\mu}] = [\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - \\ &- r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] \bar{\rho} + [2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} r \cos \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta] \bar{n} + \\ &+ [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta] \bar{\mu}. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Rezultă următoarele componente pentru viteză și accelerație:

$$\begin{aligned} v_{\rho} &= \dot{r}, v_{\mu} = r \dot{\theta}, v_n = r \sin \theta \dot{\varphi}, \\ a_{\rho} &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2, a_{\mu} = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ a_n &= r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} r \cos \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (12.32)$$

§ 12. Componentele vitezei și accelerației pe axele triedrului lui Frenet (fig. 12.8). Se presupune că este cunoscută traiectoria prin ecuația

$$\bar{r} = \bar{r}(s) \quad (12.33)$$

unde s este arcul de curbă, măsurat de la un anumit punct M_0 , al curbei, considerat ca origine a arcelor. În acest caz s-a arătat că mișcarea este definită printr-o singură funcție scalară

$$s=s(t). \quad (12.34)$$

Ecuația (12.34) este *ecuația orară a mișcării*. Se consideră un triedru mobil, cu originea în M , avînd ca axe tangenta la curbă, orientată de versorul $\bar{\tau}$, normala principală orientată de versorul $\bar{\nu}$ și binormala orientată de versorul $\bar{\beta}$ (triedrul lui Frenet sau triedrul natural).

Folosind ecuația parametrică a traiectoriei (12.33) și ecuația orară (12.34) se determină componentele vitezei și accelerației pe axele triedrului lui Frenet, ținîndu-se seama de definițiile generale ale acestor vectori

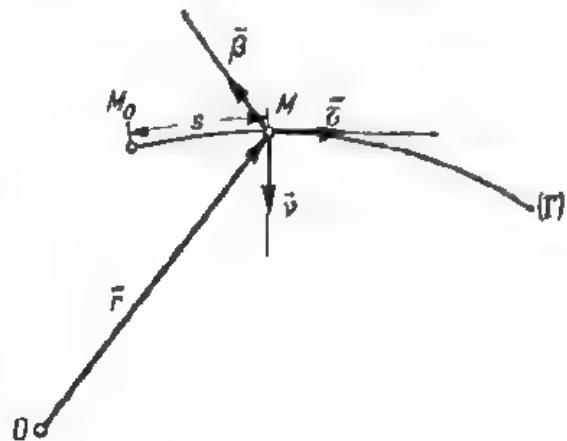


Fig. 12.8

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \bar{\tau}, \quad (12.35)$$

căci $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ [v. cap. I, § 29]. Mai departe

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{s} \bar{\tau} + \dot{s} \dot{\bar{\tau}}.$$

Dar

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} \bar{\nu},$$

căci $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{\nu}$ [prima formulă a lui Frenet, v. cap. I, formula (1.86)].

Rezultă

$$\bar{a} = \ddot{s} \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{\nu}. \quad (12.36)$$

Din formulele (12.35) și (12.36) rezultă componentele vitezei și accelerației pe axele triedrului lui Frenet

$$\left. \begin{aligned} v_{\tau} &= \dot{s} = v, & v_{\nu} &= 0, & v_{\beta} &= 0 \\ a_{\tau} &= \ddot{s} = \dot{v}, & a_{\nu} &= \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}, & a_{\beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.37)$$

Rezultă că viteza este tangentă la traiectorie în M , iar accelerația este conținută în planul osculator la traiectorie în punctul M . Componenta a_{τ} a accelerației se numește *accelerație tangențială*, iar a_{ν} *accelerație normală*.

Observații. 1°. Dacă într-un anumit interval de timp $a_{\tau} = 0$, rezultă $v = \text{const}$ și mișcarea curbilinie se numește *uniformă*.

2°. Dacă a_{τ} și v au același semn, viteza crește în valoare absolută și mișcarea se numește *accelerată*. Dacă a_{τ} și v au semne contrarii mișcarea se numește *întârziată* (decelerată).

3°. Dacă $a_t = \text{const.}$ mișcarea se numește *uniform variată*, ea putînd fi *uniform accelerată* dacă a_t și v sînt de același semn și *uniform întîrziată* dacă a_t și v sînt de semne contrarii.

4°. Scalarul accelerației normale, a_n fiind în general pozitiv, accelerația normală are sensul versorului \bar{v} , adică este dirijată către centrul de curbură (este centripetă).

5°. Accelerația normală poate fi nulă (exceptînd cazul $v=0$), cînd $\frac{1}{\rho} = 0$, adică în punctele de inflexiune ale traiectoriei, sau în cazul cînd traiectoria este o linie dreaptă.

6°. Singura mișcare în care *accelerația este nulă*, este mișcarea rectilinie și uniformă, căci din $\bar{a}=0$ rezultă $a_n=0$ și $a_t=0$, adică $\frac{1}{\rho}=0$ și $v=\text{const.}$

Accelerație de ordinul al doilea. Derivînd expresia accelerației se obține un vector denumit *accelerație de ordinul al doilea*. Deși această accelerație de ordin superior nu intervine direct în ecuațiile fundamentale ale dinamicii, există motive să se presupună că anumite mărimi fizice care intervin în fenomene ce se desfășoară cu o variație foarte rapidă, în timp, a intensității forței (ciocniri, smucituri, cutremure etc.) se pot exprima nemijlocit în funcție de accelerația de ordinul al doilea și în general în funcție de accelerațiile de ordin superior. De aceea accelerația de ordinul al doilea și accelerațiile de ordin superior au format obiectul a numeroase studii teoretice ¹.

Cu notațiile de mai înainte avem

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{v} \right] = \ddot{v}\bar{\tau} + \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{\rho} \right) \cdot \bar{v} + \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \dot{\bar{v}}.$$

Dar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{\rho} \right) = \frac{2v\dot{v}}{\rho} - \frac{v^2}{\rho^2} \cdot \dot{\rho} = \frac{2v\dot{v}}{\rho} - \frac{v^2}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{2v\dot{v}}{\rho} - \frac{v^3}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{ds}.$$

În baza formulelor lui Frenet

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{v} \quad \text{și} \quad \frac{d\bar{v}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\bar{\tau} + \frac{1}{\rho_t}\bar{\beta},$$

unde ρ_t este raza de torsiune, avem

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}\bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{v}{\rho}\bar{\tau} + \frac{v}{\rho_t}\bar{\beta}.$$

Rezultă atunci

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \ddot{v}\bar{\tau} + \left(\frac{2v\dot{v}}{\rho} - \frac{v^3}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \right) \bar{v} + \frac{\dot{v}}{\rho}\bar{v} - \frac{v^3}{\rho^2}\bar{\tau} + \frac{v^3}{\rho_t}\bar{\beta}.$$

Grupînd termenii găsim

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{\rho^2} \right) \bar{\tau} + \left(\frac{3v\dot{v}}{\rho} - \frac{v^3}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{ds} \right) \bar{v} + \frac{v^3}{\rho_t}\bar{\beta}.$$

Accelerația de ordinul al doilea, are deci, în cazul general, componente diferite de zero, pe toate axele triedrului lui Frenet.

¹ A. A. Belez, La notion de secousse et son rôle dans la dynamique (Bulletin de Mathématique et de Physique pures et appliquées de l'école Polytechnique de Bucarest, Nr. 1, 2, 3, 1936-1937, Anul VIII).

C. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI

§ 13. **Mișcarea rectilinie uniformă.** Se numește mișcare rectilinie uniformă o mișcare a cărei traiectorie este o linie dreaptă și a cărei viteză este constantă.

Pentru ușurința studiului se presupune că mișcarea are loc pe axa Ox a unui triedru cartezian. Datele problemei sînt

$$v_x = C_1, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Ținînd seama că $v_x = \dot{x}$ rezultă $\dot{x} = C_1$ și, prin integrare

$$x = C_1 t + C_2.$$

Constanta C_1 reprezintă viteza v a mobilului la un moment dat. Constanta C_2 reprezintă abscisa punctului la momentul inițial ($t=0$). Convenim s-o numim *spațiu inițial* și o notăm cu x_0 . Ecuația mișcării rectilinii uniforme devine

$$x = vt + x_0. \quad (12.38)$$

Aceasta este forma cea mai generală a unei mișcări rectilinii uniforme pe axa Ox . Dacă se calculează accelerația, se găsește $\ddot{x} = 0$.

Se poate arăta, reciproc, că singura mișcare pentru care $\ddot{a} = 0$ este mișcarea rectilinie și uniformă. Într-adevăr, proiectînd relația $\ddot{a} = 0$ pe axele unui triedru cartezian se obține

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0,$$

din care se deduc prin integrare

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0, \quad z = ct + z_0,$$

unde a, b, c, x_0, y_0, z_0 sînt șase constante de integrare. Eliminînd timpul între aceste ecuații parametrice se obține

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

adică ecuația unei drepte. Componentele vitezei vor fi

$$v_x = a, \quad v_y = b, \quad v_z = c.$$

Rezultă

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \text{const}$$

(vezi și observația 6^o de la § 12).

Diagrama mișcării. În fig. 12.9 s-a reprezentat grafic mișcarea rectilinie și uniformă pe axa Ox . În abscisă s-a înscris timpul t iar în ordonată spațiul x . Diagrama este o linie dreaptă. Ordonata la origine reprezintă spațiul inițial x_0 . Dacă timpul a fost reprezentat la scara $1/m$, iar spațiile x la scara $1/n$ atunci scalarul vitezei v se poate obține cu formula

$$v = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \theta.$$

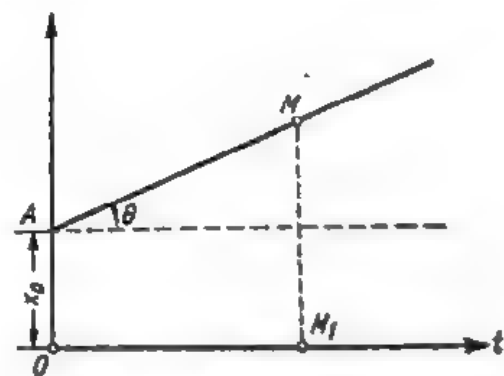


Fig. 12.9

§ 14. **Mișcarea rectilinie uniform variată.** Se numește mișcare rectilinie uniform variată o mișcare a cărei traiectorie este o linie dreaptă și a cărei accelerație este constantă. Vom considera că mișcarea are loc pe axa Ox a unui triedru cartezian. Din definiția mișcării rezultă

$$a_x = a, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Cum $a_x = \ddot{x}$ rezultă $\ddot{x} = a$ și, integrând succesiv

$$\dot{x} = at + C_1, \quad x = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2.$$

Semnificația fizică a constantelor de integrare C_1 și C_2 se obține dacă se înlocuiește în expresiile vitezei \dot{x} și spațiului x , valoarea timpului t , cu 0. Obținem $\dot{x}(0) = C_1$ și $x(0) = C_2$. Deci constantele C_1 și C_2 reprezintă respectiv viteza și abscisa mobilului în momentul inițial. Se vor nota $C_1 = v_0$ și $C_2 = x_0$. Atunci legea spațiilor și a vitezelor în mișcarea uniform variată vor căpăta formele

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0, \quad v = at + v_0. \quad (12.39)$$

În aplicații este uneori util să se exprime viteza v a mobilului în funcție de abscisa x . Eliminând timpul t între relațiile (12.39), se obține

$$t = \frac{v - v_0}{a} \text{ apoi } x = \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + x_0$$

și efectuând toate calculele,

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}. \quad (12.40)$$

Această formulă este cunoscută sub numele de *formula lui Torricelli*. Când mobilul pleacă din origine fără viteză inițială ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$)

$$v = \sqrt{2ax}.$$

În cazul particular al unui punct material greu, lăsat liber să cadă în vid pe verticală, de la înălțimea h , viteza cu care atinge pământul este dată de expresia

$$v = \sqrt{2gh},$$

unde prin g s-a notat accelerația gravitației (la București $g = 9,8053 \text{ m/s}^2 \approx 9,81 \text{ m/s}^2$).

Se deosebesc două feluri de mișcări rectilinii uniform variate: accelerate și întârziate.

O mișcare uniform variată este *accelerată*, într-un interval de timp, dacă, în acel interval viteza și accelerația au același sens și este *întârziată*, dacă viteza și accelerația au sensuri opuse.

Este posibil ca o mișcare uniform variată să aibă ambele faze, accelerată și întârziată, sau numai una dintre ele. De exemplu un punct material greu, lăsat liber să cadă pe verticală sau aruncat cu o viteză inițială descendentă, are o mișcare uniform accelerată, deoarece în tot timpul mișcării viteza și accelerația au același sens (descendent).

În cazul unui mobil, care frânează, mișcarea este definită din momentul $t=0$ până în momentul când se oprește. În tot timpul mișcării, accelerația (presupusă constantă) este dirijată în sens invers vitezei, deci mișcarea este întîrziată.

În sfîrșit, în cazul unui punct material greu aruncat pe verticală în sus, mișcarea este întîrziată pînă în momentul când este atinsă înălțimea maximă, iar după aceea este accelerată.

Diagrama mișcării. În fig. 12.10 s-a reprezentat diagrama unei mișcări uniform variate. Diagrama este o parabolă. Ordonata la origine este spațiul inițial. Dacă $1/m$ este scara timpurilor și $1/n$ este scara spațiilor x , iar θ_0 este unghiul dintre tangenta la parabolă în A_0 și axa Ot , avem

$$v_0 = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \theta_0.$$

Iar într-un punct oarecare A , viteza este dată de

$$v = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \theta,$$

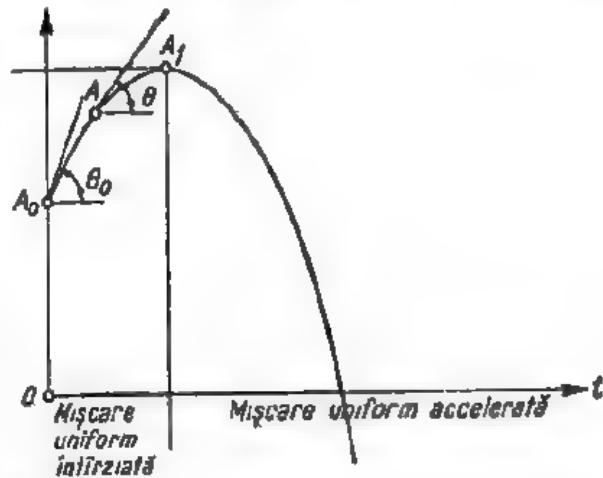


Fig. 12.10

unde θ este unghiul dintre tangenta la diagramă în A și axa Ot . Se observă că unghiul θ descrește din A în A_1 apoi devine obtuz. Rezultă că viteza descrește din A_0 în A_1 apoi își schimbă sensul și crește în valoare absolută.

§ 15. Mișcarea circulară. a) *Mișcare circulară uniformă.* Se numește mișcare circulară uniformă mișcarea a cărei traiectorie este un cerc și în care modulul vitezei este constant.

Să presupunem că mobilul se găsea în momentul inițial în A și la un moment dat se află în M (fig. 12.11, a). Mișcarea fiind uniformă, arcul AM

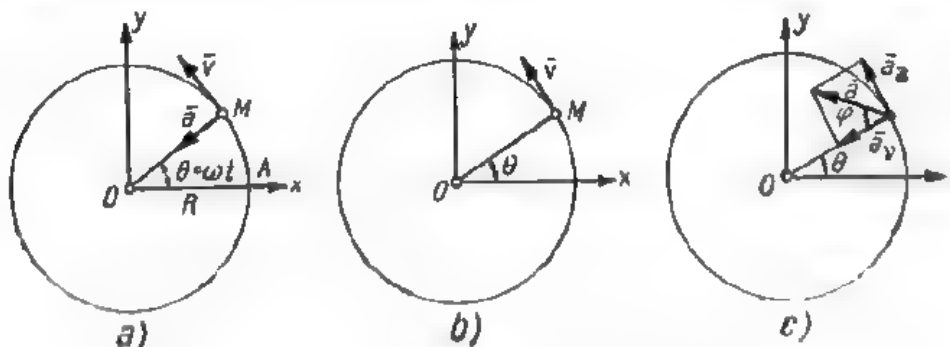


Fig. 12.11

și unghiul θ descris de raza OM crește proporțional cu timpul t . Se numește *viteză unghiulară* ω unghiul descris de raza vectorie în unitatea de timp. Rezultă

$$\theta = \omega t, \quad (12.41)$$

Viteza și accelerația mișcării se determină calculând proiecțiile pe axele triedrului lui Frenet. Ecuația orară este

$$(12.42) \quad s = AM = R\omega t,$$

Folosind expresiile (12.37) în cazul mișcării circulare uniforme, se

găsește

$$(12.43) \quad v = \dot{s} = R\omega, \quad a_t = \ddot{s} = 0, \quad a_n = \dot{v} = \frac{R\omega^2}{\omega} = R\omega^2.$$

Observație. În practică se cunoaște de obicei numărul de rotații pe minut (turație) n pe care le execută punctul M . În acest caz viteza unghiulară ω se calculează observând că în timp de un minut unghiul descris de raza OM este 2π . În timp de o secundă raza OM va descrie un unghi

$$(12.44) \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Unități de măsură. Viteza unghiulară se exprimă prin numărul de radianți pe unitatea de timp. Ecuația dimensională va fi deci:

$$[\omega] = T^{-1}.$$

În sistemele CGS și SI viteza unghiulară se exprimă în radianți pe secundă.

b) *Mișcarea circulară neuniformă.* În cazul mișcării circulare neuni-

forme unghiul θ este o funcție oarecare de timpul t . Prin analogie cu viteza și accelerația în mișcarea rectilinie, viteza și accelerația unghiulară se definesc prin relațiile

$$(12.45) \quad \omega = \dot{\theta} \text{ și } \dot{\omega} = 0.$$

Ecuația orară a mișcării este

$$(12.46) \quad s = AM = R\theta.$$

Folosind expresiile (12.37), în cazul mișcării circulare neuniforme se găsește

$$(12.47) \quad v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega, \quad a_t = \ddot{s} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

Modulul accelerației va fi

$$(12.48) \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}.$$

Unghiul dintre vectorul accelerație și raza OM este dat de relația

$$(12.49) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^3}.$$

În fig. 12.11, b și c s-au desenat vectorii v și a în cazul unei mișcări circulare neuniforme.

Observație. Pentru indicat în fig. 12.11, b , pentru vectorul v corespunde cazul în care $\omega > 0$. În cazul $\omega < 0$ sensul se schimbă. De asemenea sensul indicat în fig. 12.11, c pentru accelerația tangențială a_t corespunde cazului $\dot{\omega} < 0$. În cazul $\dot{\omega} > 0$ sensul se schimbă. Accelerația normală a_n are întotdeauna sensul indicat în fig. 12.11, c , adică este centripetă.

Aplicații. 1°. Mișcarea pe cicloadă. Să se studieze mișcarea unui punct de pe periferia unei roți de rază R (situată într-un plan vertical), care se rostogolește fără să alunce pe un plan orizontal, știind că centrul roții se deplasează uniform cu viteza v_0 (fig. 12.12).

Rezolvare. Condiția de rostogolire fără alunecare conduce la egalitatea

$$\overline{OA} = \text{arc } \widehat{AM}.$$

$$\text{Dar } \overline{OA} = v_0 t \text{ iar}$$

$$\text{arc } \widehat{AM} = R\theta.$$

Rezultă

$$v_0 t = R\theta$$

de unde

$$\theta = \frac{v_0}{R} t = \omega t.$$

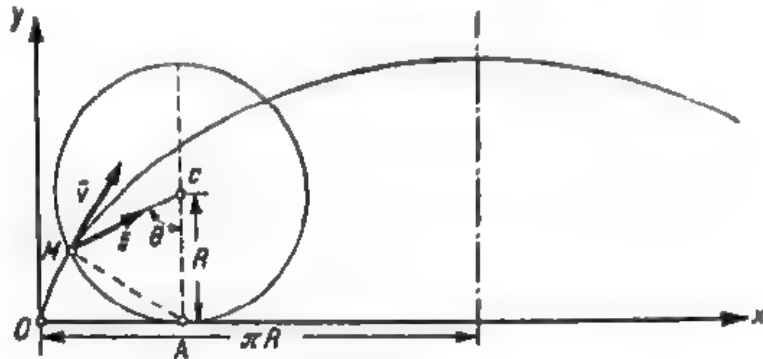


Fig. 12.12

Coordonatele punctului M , în funcție de unghiul θ , vor fi

$$x = R\theta - R \sin \theta, \quad y = R - R \cos \theta.$$

Din geometria analitică se știe că aceste ecuații definesc parametric o *cicloadă*.

Înlocuind $\theta = \omega t$, se obține

$$x = R(\omega t - \sin \omega t), \quad y = R(1 - \cos \omega t).$$

Componentele vitezei și accelerației sunt

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= R\omega(1 - \cos \omega t), & v_y = \dot{y} &= R\omega \sin \omega t, \\ a_x = \ddot{x} &= R\omega^2 \sin \omega t, & a_y = \ddot{y} &= R\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Se pot arăta unele proprietăți interesante ale vectorilor \vec{v} și \vec{a} . Astfel vectorul \vec{v} este normal pe vectorul \overline{AM} și egal în modul cu $AM\omega$, iar vectorul accelerație are direcția razei \overline{MC} și este egal în modul cu $MC\omega^2$.

Într-adevăr $\overline{AM} = -R \sin \omega t \vec{i} + R(1 - \cos \omega t) \vec{j}$ și $\vec{v} = R\omega(1 - \cos \omega t) \vec{i} + R\omega \sin \omega t \vec{j}$. Considerăm produsul scalar

$$\overline{AM} \cdot \vec{v} = -R^2 \omega \sin \omega t (1 - \cos \omega t) + R^2 \omega (1 - \cos \omega t) \sin \omega t \equiv 0, \text{ deci } \overline{AM} \text{ și } \vec{v} \text{ sînt ortogonali. Apoi}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{R^2 \omega^2 (1 - \cos \omega t)^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \omega t} = R\omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t},$$

$$|\overline{AM}| = \sqrt{R^2 \sin^2 \omega t + R^2 (1 - \cos \omega t)^2} = R \sqrt{\sin^2 \omega t + (1 - \cos \omega t)^2}.$$

Rezultă

$$|\vec{v}| = |\overline{AM}| \omega.$$

Vectorul \vec{a} se scrie $\vec{a} = R\omega^2 \sin \omega t \vec{i} + R\omega^2 \cos \omega t \vec{j}$. Vectorul \overline{MC} se scrie $\overline{MC} = R \sin \omega t \vec{i} + R \cos \omega t \vec{j}$. Rezultă că proiecțiile celor doi vectori sînt proporționale, deci vectorii \vec{a} și \overline{MC} sînt coliniari. Factorul de proporționalitate fiind ω^2 rezultă $|\vec{a}| = |\overline{MC}| \omega^2$.

Acste proprietăți arată că, în ceea ce privește vitezele, un punct de pe periferia unei roți se comportă ca și cînd s-ar roti uniform cu viteza unghiulară ω în jurul punctului A , iar în ceea ce privește accelerațiile, ca și cînd s-ar roti în jurul punctului C .

2°. *Mișcarea uniformă pe elice.* Se consideră un mobil care se deplasează uniform pe o elice de pas p , situată pe un cilindru de rază R (fig. 12.13). Desfășurând cilindrul, se observă că dacă mișcarea este uniformă, deci arcul de elice A_0A crește proporțional cu timpul, atunci și arcul de cerc A_0A_1 și unghiul $\theta = \widehat{A_0OA_1}$ crește proporțional cu timpul. Dacă se notează $\theta = \omega t$, atunci $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$. Cota $z = A_1A$ se determină din asemănarea a două triunghiuri $\frac{z}{p} = \frac{R\omega t}{2\pi R}$. Rezultă $z = \frac{p\omega}{2\pi} t$.

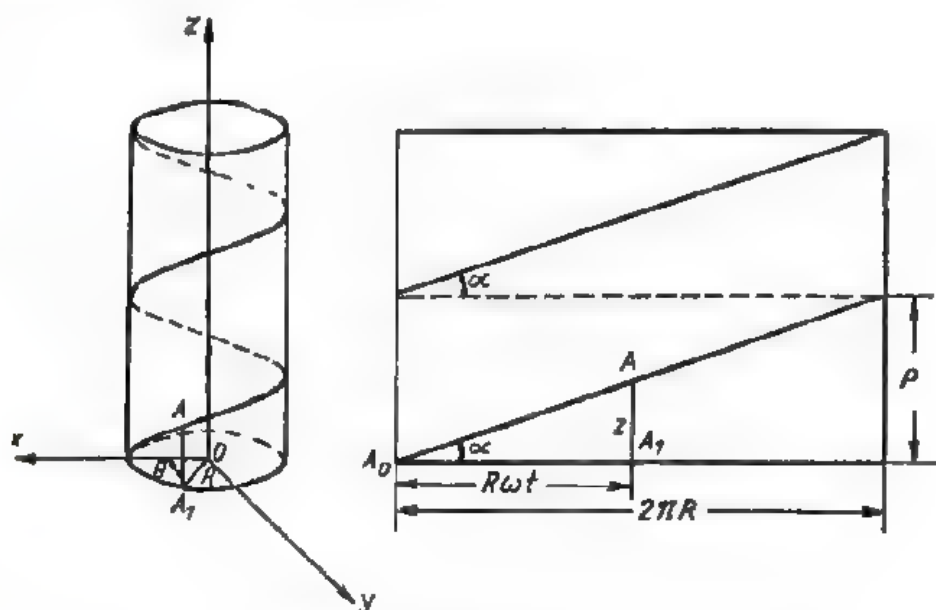


Fig. 12.13

Proiecțiile vitezei sînt

$$v_x = \dot{x} = -R\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = R\omega \cos \omega t, \quad v_z = \dot{z} = \frac{p\omega}{2\pi}.$$

Modulul vitezei este

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}}.$$

Proiecțiile accelerației sînt

$$a_x = \ddot{x} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = \ddot{y} = -R\omega^2 \sin \omega t, \quad a_z = \ddot{z} = 0.$$

Modulul accelerației este

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = R\omega^2.$$

O b s e r v a Ț i e. Pe baza acestor rezultate se poate calcula raza de curbură a elicei. Într-adevăr, deoarece mișcarea pe elice este uniformă, rezultă că accelerația se reduce la componenta normală $a = a_n = \frac{v^3}{\rho}$. Ținînd seama de expresiile găsite pentru v și a rezultă

$$\omega^2 \left(R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2} \right) = R\omega^2, \quad \text{de unde} \quad \rho = R + \frac{p^2}{4\pi^2 R}.$$

c) *Determinarea razei de curbură a traiectoriei în cazul general.* Să considerăm mișcarea definită prin vectorul $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Rezultă $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$. Dar $\vec{v} = v\vec{\tau}$ și $\vec{a} = a_t\vec{\tau} + a_n\vec{\nu}$. Atunci $\vec{v} \times \vec{a} = va_t\vec{\tau} \times \vec{\tau} + v a_n\vec{\tau} \times \vec{\nu} = v \frac{v^3}{\rho} \vec{\beta}$.

Rezultă $|\bar{v} \times \bar{a}| = \frac{v^3}{\rho}$, de unde $\rho = \frac{v^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|}$.

Folosind coordonatele carteziene, obținem

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2]^{1/2}}.$$

Se regăsește astfel cunoscuta formulă din geometria diferențială.

XIII. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

A. GENERALITĂȚI

§ 1. **Generalități.** A cunoaște mișcarea unui solid rigid echivalează cu a găsi expresiile generale pentru vectorul de poziție, viteza și accelerația unui punct oarecare al rigidului față de un reper care se consideră, în mod convențional, fix.

Fie $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ un triedru cartezian fix și $T(Oxyz)$ un triedru solidar cu rigidul, deci în mișcare față de triedrul fix (fig. 13.1).

Poziția unui punct oarecare A al rigidului se definește în raport cu triedrul mobil prin vectorul de poziție \bar{r} , respectiv prin coordonatele x, y, z ale punctului în raport cu T . *Aceste coordonate rămân evident constante în timpul mișcării.*

Poziția triedrului mobil T față de triedrul fix T_1 se caracterizează prin vectorul de poziție $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ al originii triedrului mobil și prin versorii $\bar{i} = \bar{i}(t)$, $\bar{j} = \bar{j}(t)$ și $\bar{k} = \bar{k}(t)$ ai axelor Ox , Oy și Oz . (Cunoașterea acestor patru funcții vectoriale echivalează cu cunoașterea coordonatelor punctului O și a cosinusurilor directe ale axelor mobile față de axele triedrului fix, ca funcții scalare de timp).

Poziția punctului A față de triedrul fix se definește prin vectorul de poziție $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(t)$.

Între vectorii \bar{r}_1 , \bar{r} și \bar{r}_0 există relația:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}, \quad (13.1)$$

sau, punând în evidență coordonatele x, y, z ale punctului A față de triedrul mobil

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (13.2)$$

Relativ la funcțiile vectoriale \bar{r} , \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} , se observă că în timp ce \bar{r}_0 este supusă la puține restricții (continuitate, uniformitate, derivabilitate

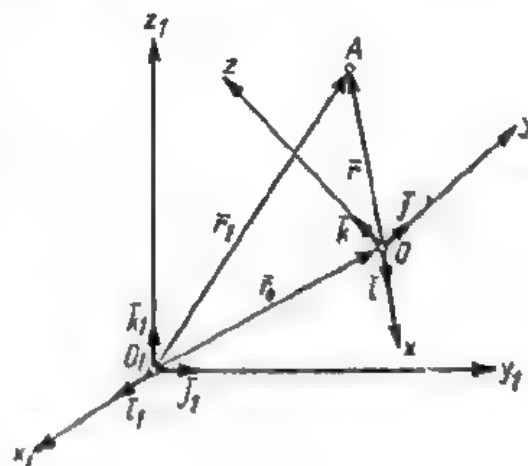


Fig. 13.1

de două ori), funcțiile \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} , reprezentând versorii axelor unui triedru ortogonal trebuie să aibă modulul egal cu unitatea și să fie ortogonale, două câte două.

Aceste condiții se exprimă prin relațiile

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} &= 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.\end{aligned}\quad (13.3)$$

Relațiile (13.3) permit să fie redus numărul parametrilor cinematici care caracterizează mișcarea unui rigid.

§ 2. Distribuția vitezelor într-un rigid. Viteza punctului A al rigidului în raport cu triedrul fix T_1 se obține prin derivarea relației (13.2) în raport cu timpul

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}. \quad (13.4)$$

În această derivare s-au considerat constante coordonatele x , y , z , deoarece triedrul mobil este solidar cu rigidul și deci poziția punctului A nu se schimbă față de $Oxyz$. Derivata $\dot{\vec{r}}_0$ reprezintă viteza originii O , a triedrului mobil. Pentru a găsi o semnificație a celorlalți termeni din (13.4), se derivează relațiile (13.3) în raport cu timpul. Se obține

$$\begin{aligned}2\dot{\vec{i}}\vec{i} &= 0, \quad 2\dot{\vec{j}}\vec{j} = 0, \quad 2\dot{\vec{k}}\vec{k} = 0 \\ \dot{\vec{i}}\vec{j} + \vec{i}\dot{\vec{j}} &= 0, \quad \dot{\vec{j}}\vec{k} + \vec{j}\dot{\vec{k}} = 0, \quad \dot{\vec{k}}\vec{i} + \vec{k}\dot{\vec{i}} = 0.\end{aligned}\quad (13.5)$$

Să notăm

$$\dot{\vec{j}}\vec{k} = -\vec{j}\dot{\vec{k}} = \omega_x, \quad \dot{\vec{k}}\vec{i} = -\vec{k}\dot{\vec{i}} = \omega_y, \quad \dot{\vec{i}}\vec{j} = -\vec{i}\dot{\vec{j}} = \omega_z. \quad (13.6)$$

Ținând seama că proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vector și versorul axei, se găsesc pentru proiecțiile vectorilor $\dot{\vec{i}}$, $\dot{\vec{j}}$ și $\dot{\vec{k}}$ pe axele Ox , Oy și Oz valorile din tabela 8 de mai jos. La fel, ținând seama de (13.5) și de (13.6) rezultă pentru aceste proiecții valorile din tabela 9.

Tabela 8

	Ox	Oy	Oz
$\dot{\vec{i}}$	$\dot{\vec{i}}\vec{i}$	$\dot{\vec{i}}\vec{j}$	$\dot{\vec{i}}\vec{k}$
$\dot{\vec{j}}$	$\dot{\vec{j}}\vec{i}$	$\dot{\vec{j}}\vec{j}$	$\dot{\vec{j}}\vec{k}$
$\dot{\vec{k}}$	$\dot{\vec{k}}\vec{i}$	$\dot{\vec{k}}\vec{j}$	$\dot{\vec{k}}\vec{k}$

Tabela 9

	Ox	Oy	Oz
$\dot{\vec{i}}$	0	ω_z	$-\omega_y$
$\dot{\vec{j}}$	$-\omega_z$	0	ω_x
$\dot{\vec{k}}$	ω_y	$-\omega_x$	0

Atunci

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = x(\omega_z\vec{j} - \omega_y\vec{k}) + y(-\omega_z\vec{i} + \omega_x\vec{k}) + z(\omega_y\vec{i} - \omega_x\vec{j}) = \\ &= \vec{i}(\omega_y z - \omega_x y) + \vec{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \vec{k}(\omega_x y - \omega_y x).\end{aligned}$$

Sub această formă se recunoaște că expresia derivatei vectorului de poziție este un produs vectorial dintre un vector $\vec{\omega}$, ale cărui proiecții ar fi ω_x , ω_y și ω_z și vectorul de poziție, ale cărui proiecții sînt x , y și z .

În definitiv se poate scrie

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (13.7)$$

Înlocuind acest rezultat în (13.4), pentru viteza unui punct oarecare al rigidului se obține următoarea expresie

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (13.8)$$

Se observă că distribuția vitezelor într-un rigid este definită de două funcții vectoriale: $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t)$, care reprezintă viteza originii triedrului mobil și $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, un vector a cărui semnificație se va vedea mai târziu și ale cărui componente ω_x , ω_y , ω_z pe axele triedrului mobil sînt date de relațiile (13.6).

Proiecțiile pe axe ale vitezei \vec{v} sînt

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x.\end{aligned} \quad (13.9)$$

Observație. Uneori componentele vectorului $\vec{\omega}$ se notează

$$\omega_x = p, \quad \omega_y = q, \quad \omega_z = r.$$

§ 3: Distribuția accelerațiilor într-un rigid. Derivînd relația (13.8) în raport cu timpul, se obține

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}.$$

Ținînd seama că $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$, $\dot{\vec{v}}_0 = \vec{a}_0$, iar $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (13.7), rezultă următoarea lege de distribuție a accelerațiilor într-un rigid

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (13.10)$$

Proiecțiile accelerației \vec{a} pe axe sînt

$$\begin{aligned}a_x &= a_{0x} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + (\omega_x\omega_y - \dot{\omega}_z)y + (\omega_x\omega_z + \dot{\omega}_y)z, \\ a_y &= a_{0y} - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + (\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x)z + (\omega_y\omega_x + \dot{\omega}_z)x, \\ a_z &= a_{0z} - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + (\omega_z\omega_x - \dot{\omega}_y)x + (\omega_z\omega_y + \dot{\omega}_x)y.\end{aligned} \quad (13.11)$$

B. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE RIGIDULUI

§ 4. Mișcarea de translație. Un solid rigid are o mișcare de translație dacă o dreaptă oarecare a rigidului rămâne în tot timpul mișcării paralelă cu ea însăși.

Ca exemplu de mișcări de translație cităm:

a) *Translații rectilinii*: mișcarea sertarului mesei, mișcarea caroseriei unui vehicul care parcurge un drum rectiliniu, mișcarea unui ascensor, mișcarea unui piston în interiorul unui cilindru etc.

b) *Translații circulare*: mișcarea bielei de cuplare a două roți ale căror axe sînt fixe, mișcarea unui scrînciob etc.

c) *Alte translații*: biela de cuplare a roților unei locomotive (un punct al bielei descrie o cicloidă scurtată) etc.

Într-o mișcare de translație, traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului sînt identice, ele putînd fi suprapuse printr-o translație geometrică. Această proprietate rezultă din relația

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}$$

dintre vectorii de poziție \vec{r}_1 și \vec{r}_0 ai punctelor A și O (fig. 13.1). Se observă că, în cazul translației, vectorul \vec{r} este constant și deci traiectoria punctului O poate fi făcută să coincidă cu traiectoria punctului A printr-o translație geometrică de vector \vec{r} .

Pentru ca orice dreaptă a rigidului să rămîna paralelă cu ea însăși în timpul mișcării este suficient ca această condiție să fie îndeplinită de axele Ox , Oy , Oz ale triedrului mobil.

Rezultă că versorii \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} ai acestor axe trebuie să fie constanți, atît ca mărime cît și ca direcție. Deci,

$$\dot{\vec{i}}=0, \quad \dot{\vec{j}}=0, \quad \dot{\vec{k}}=0.$$

Folosind formulele (13.6), deducem $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=0$, deci $\vec{\omega}=0$. Legea de distribuție a vitezelor (13.8) se reduce la

$$\vec{v} = \vec{v}_0, \quad (13.12)$$

iar legea de distribuție a accelerațiilor (13.10) se reduce la

$$\vec{a} = \vec{a}_0. \quad (13.13)$$

Relațiile (13.12) și (13.13) arată că, la un moment dat, toate punctele unui rigid, aflat în mișcare de translație, au aceeași viteză și aceeași accelerație.

Vectorii „viteză de translație” și „accelerație de translație” sînt deci vectori liberi, ei putînd fi aplicați în orice punct al rigidului.

§ 5. Mișcarea de rotație. Un solid rigid are o mișcare de rotație, dacă în tot timpul mișcării două puncte, aparținînd rigidului, rămîn fixe în spațiu. Considerații geometrice elementare arată că toate punctele care aparțin dreptei ce unește cele două puncte fixe rămîn de asemenea fixe. Această dreaptă se numește *axă de rotație*.

Ca exemple de mișcări de rotație cităm: mișcarea unei roți a cărei axă este fixată de batiul (elementul fix) unei mașini, mișcarea acelor unui ceasornic în raport cu cadranul, a unui pendul, mișcarea Pământului în jurul axei polilor, abstracție făcând de mișcarea lui în jurul Soarelui etc. ...

Pentru studiul mișcării vom considera un triedru mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, a cărui axă Oz coincide cu axa de rotație și un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ a cărui origine O_1 coincide cu O și a cărui axă Oz_1 coincide ca suport și sens cu Oz (fig. 13.2). Dacă se notează cu θ unghiul axelor (O_1x_1 , Ox), mișcarea rigidului este definită, dacă se cunoaște funcția scalară:

$$\theta = \theta(t).$$

Un rigid cu o axă fixă are deci un singur grad de libertate.

Considerații geometrice elementare arată că traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului sînt cercuri, situate în plane normale pe axa de rotație și avînd centrul pe această axă. Punctele rigidului au deci mișcări circulare. Din cauza rigidității, aceste mișcări circulare nu sînt independente. Legătura dintre aceste mișcări va rezulta din studiul distribuției vitezelor și accelerațiilor. În acest scop, în formulele (13.8) și (13.10) este necesar să se determine parametrii cinematici \vec{v}_0 , \vec{a}_0 , $\vec{\omega}$ și $\dot{\vec{\omega}}$. Din cauză că O este fix, rezultă $\vec{v}_0 = 0$ și $\vec{a}_0 = 0$.

Pentru determinarea vectorului $\vec{\omega}$ se folosesc relațiile (13.6). În cazul de față, proiectînd vectorii \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} pe axe fixe, de versori \vec{i}_1 , \vec{j}_1 și \vec{k}_1 , se obține

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1, \quad \vec{j} = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1, \quad \vec{k} = \vec{k}_1.$$

Derivînd aceste relații

$$\dot{\vec{i}} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1 = \dot{\theta} \vec{j}, \quad \dot{\vec{j}} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}, \quad \dot{\vec{k}} = 0,$$

rezultă

$$\omega_x = \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} = 0; \quad \omega_y = \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = -\dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} = 0; \quad \omega_z = \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j} = -\dot{\vec{j}} \cdot \vec{i} = \dot{\theta}. \quad (13.14)$$

Vectorul $\vec{\omega}$ este deci dirijat în sensul axei Oz și are ca mărime viteză unghiulară $\dot{\theta}$. În cele ce urmează $\vec{\omega}$ se va numi vectorul viteză unghiulară al mișcării de rotație.

Pentru determinarea vectorului $\dot{\vec{\omega}}$ se derivează componentele vectorului $\vec{\omega}$. Rezultă

$$\dot{\omega}_x = 0, \quad \dot{\omega}_y = 0, \quad \dot{\omega}_z = \ddot{\theta} \quad (13.15)$$

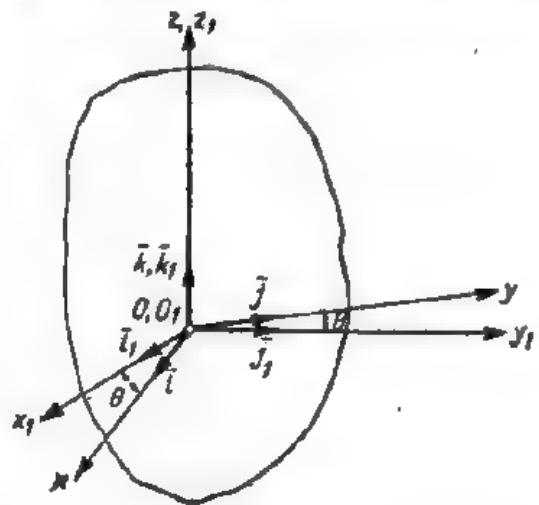


Fig. 13.2

Observație. Valorile găsite pentru componentele $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ale vectorului $\vec{\omega}$ rămân valabile și în cazul mai general al mișcării unui rigid în care planul mobil xOy rămâne paralel cu un plan fix din spațiu (respectiv axa Oz a triedrului mobil are o direcție fixă).

În cele ce urmează, $\vec{\omega}$ se va numi *vectorul accelerație unghiulară al mișcării* (notat uneori cu ε).

Rezumind, parametrii cinematici ai mișcării de rotație analizate prezintă următoarele particularități:

$$\vec{v}_0 = 0, \quad \vec{a}_0 = 0, \quad \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}, \quad \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta} \vec{k},$$

adică originea are viteza și accelerația zero, iar vectorii $\vec{\omega}$ și $\dot{\vec{\omega}}$ au o direcție fixă.

Distribuția vitezelor: în cazul mișcării de rotație, din formula (13.8) rezultă

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\theta} \vec{k} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\dot{\theta} y \vec{i} + \dot{\theta} x \vec{j}.$$

Componentele vectorului \vec{v} pe axele triedrului mobil sînt

$$v_x = -\dot{\theta} y = -\omega y, \quad v_y = \dot{\theta} x = \omega x, \quad v_z = 0. \quad (13.16)$$

Din expresiile componentelor vitezei \vec{v} pe axe, rezultă următoarele proprietăți ale câmpului de viteze într-o mișcare de rotație:

a) Singurele puncte de viteză nulă sînt cele pentru care $x=0$ și $y=0$, adică punctele de pe axa de rotație Oz .

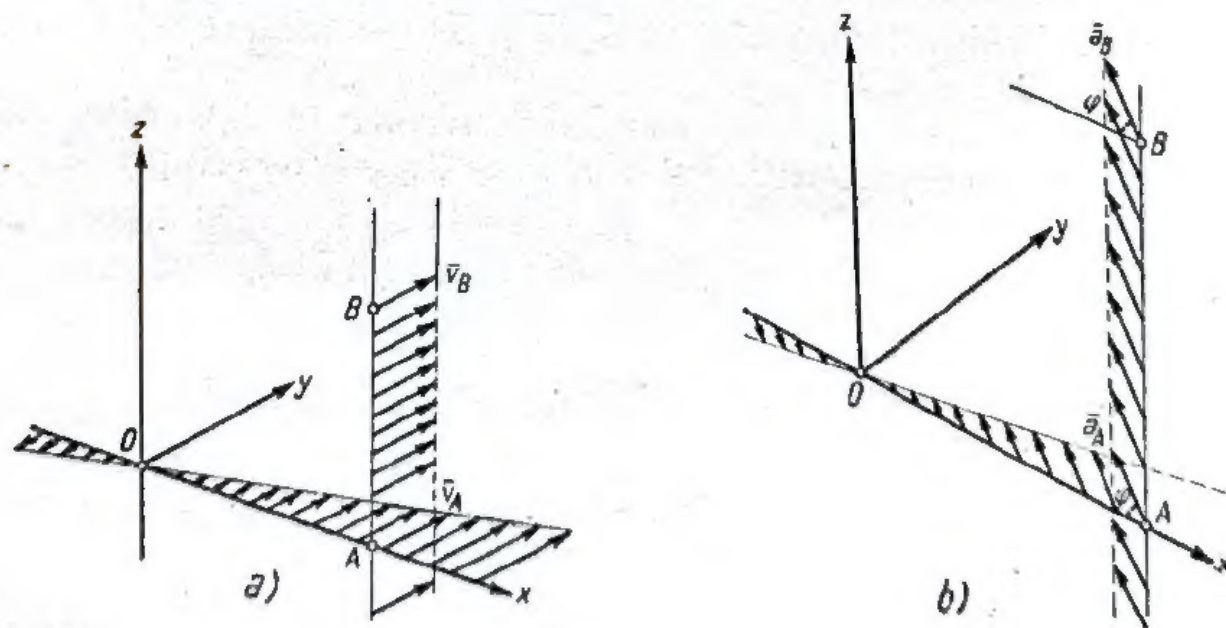


Fig. 13.3

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.3, a) paralelă cu axa de rotație, vitezele sînt aceleași, deoarece expresiile componentelor v_x, v_y și v_z nu conțin cota z .

c) Vitezele sînt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz , deoarece $v_z = 0$.

d) Pe o dreaptă OA ce întâlnește axa de rotație sub un unghi drept, vitezele sînt normale la ea și variază liniar, fiind proporționale cu distanța față de axa de rotație. Aceasta rezultă imediat dacă se consideră ca dreaptă OA , axa Ox , întâlnește axa sub un unghi drept. Rezultă atunci $v_x=0$, $v_y=\omega x$, $v_z=0$. Se recunoaște aici formula $v=R\omega$ ($R=x$) stabilită în cazul mișcării circulare. Rezultă deci că *mișcările circulare ale diferitelor puncte ale rigidului se fac cu aceeași viteză unghiulară*.

Distribuția accelerațiilor: în cazul mișcării de rotație, din formula (13.10) rezultă

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \vec{\omega} \times (-y\vec{i} + x\vec{j}) = \\ &= (-\dot{y}\vec{\omega} - \dot{\omega}^2 x)\vec{i} + (x\dot{\omega} - y\dot{\omega}^2)\vec{j} = -(\dot{\omega}y + \omega^2 x)\vec{i} + (\omega x - \omega^2 y)\vec{j}.\end{aligned}$$

Rezultă următoarele componente ale vectorului \vec{a} pe axele triedrului mobil:

$$a_x = -\dot{\omega}y - \omega^2 x, \quad a_y = \dot{\omega}x - \omega^2 y, \quad a_z = 0. \quad (13.17)$$

Din expresiile componentelor accelerației \vec{a} pe axe, rezultă următoarele proprietăți ale câmpului accelerațiilor într-o mișcare de rotație:

a) Punctele de accelerație nulă sînt cele pentru care

$$-\omega^2 x - \dot{\omega}y = 0, \quad \dot{\omega}x - \omega^2 y = 0.$$

Sistemul fiind omogen, iar determinantul $\omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0$, rezultă singurele valori posibile $x=0$ și $y=0$, deci *singurele puncte de accelerație nulă sînt cele de pe axa de rotație*.

b) Pe o dreaptă AB , paralelă cu axa de rotație (fig. 13.3, b), accelerațiile sînt aceleași, deoarece componentele a_x , a_y și a_z nu depind de cota z .

c) Accelerațiile sînt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz , deoarece $a_z=0$.

d) Pe o dreaptă ce întâlnește axa de rotație sub un unghi drept, accelerațiile variază liniar (fig. 13.3, b), fiind proporționale cu OA și fac un unghi constant φ cu raza OA . Dacă se consideră ca dreaptă OA , axa Ox , ceea ce, evident, nu particularizează poziția ei, atunci din (13.17) rezultă

$$a_x = -\omega^2 x, \quad a_y = \dot{\omega}x, \quad a_z = 0, \text{ apoi } a = x\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \text{const.}$$

Se recunosc aici rezultatele obținute la mișcarea circulară [formulele (12.48) și (12.49) în care $R=x$]. Rezultă că *mișcările circulare ale diferitelor puncte ale rigidului se fac cu aceeași viteză unghiulară ω și cu aceeași accelerație unghiulară $\dot{\omega}$* .

Observații. 1° În cazul cînd vectorul accelerație unghiulară $\dot{\omega}$ este nul într-un anumit interval de timp, mișcarea de rotație este uniformă.

2° Dacă vectorii $\dot{\omega}$ și $\vec{\omega}$ au același sens, viteza unghiulară crește în valoare absolută și mișcarea este accelerată.

3° Dacă vectorii $\dot{\omega}$ și $\vec{\omega}$ au sensuri opuse, viteza unghiulară descrește în valoare absolută și mișcarea este încetinită.

4° În cazul $\dot{\omega} = \text{const}$ mișcarea de rotație este uniform variată, și anume uniform accelerată, dacă $\dot{\omega}$ și $\vec{\omega}$ au același sens, sau uniform încetinită dacă $\dot{\omega}$ și $\vec{\omega}$ au sensuri opuse.

§ 6. Mișcarea elicoidală. Un solid rigid are o mișcare elicoidală dacă două puncte aparținând rigidului rămân, tot timpul mișcării, pe o dreaptă fixă din spațiu. Această dreaptă se numește *axa mișcării elicoidale*.

Ca exemple de mișcări elicoidale cităm: mișcarea unui șurub, mișcarea unui corp care ar cădea pe verticală rotindu-se în același timp în jurul unei axe verticale, mișcarea unui glonte în interiorul țevii armei sau pe o porțiune de traiectorie care ar putea fi asimilată cu o linie dreaptă etc.

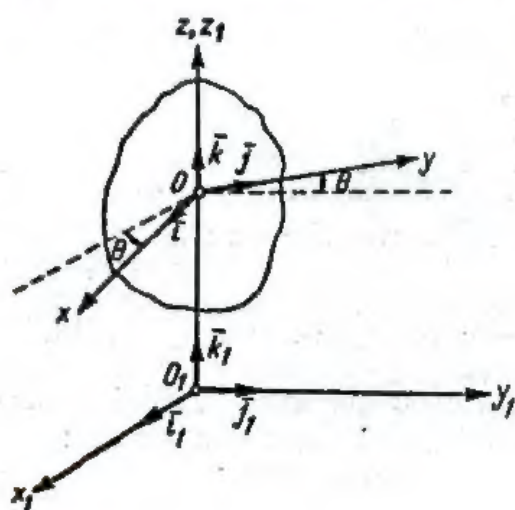


Fig. 13.4

Pentru studiul mișcării se va considera un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încât axa Oz_1 să coincidă cu axa mișcării elicoidale și un triedru mobil $Oxyz$ a cărui axă Oz coincide cu Oz_1 (fig. 13.4). Spre deosebire de mișcarea de rotație, punctul O se poate mișca pe O_1z_1 .

Mișcarea elicoidală este cunoscută când se definesc funcțiile scalare

$$z_0 = z_0(t) \text{ și } \theta = \theta(t),$$

unde s-a notat $O_1O = z_0$ și $(O_1x_1, Oz) = \theta$. Rezultă că rigidul are două grade de libertate.

Traietoriile pe care le descriu diferitele puncte ale rigidului depind de funcțiile $z_0(t)$ și $\theta(t)$. În particular, dacă aceste funcții satisfac condiția $z_0 = k\theta$ ($k = \text{const}$), caz frecvent întâlnit în practică, traiectoriile sînt elicoidale. Mișcarea elicoidală poartă în acest caz particular denumirea de *mișcare de șurub*.

În cazul mișcării elicoidale vectorii \vec{v}_0 , \vec{a}_0 , $\vec{\omega}$ și $\dot{\vec{\omega}}$ au următoarele expresii:

a) Deoarece originea O a triedrului mobil se deplasează în direcția comună a axelor Oz și Oz_1 rezultă

$$\vec{v}_0 = \dot{z}_0 \vec{k} = v_0 \vec{k} \text{ și } \vec{a}_0 = \ddot{z}_0 \vec{k} = a_0 \vec{k}.$$

b) Deoarece planul xOy al triedrului mobil rămîne paralel cu planul fix $x_1O_1y_1$, vectorii $\vec{\omega}$ și $\dot{\vec{\omega}}$ vor avea aceleași expresii ca în cazul mișcării de rotație (vezi prima observație de la § 5)

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k} \text{ și } \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\theta} \vec{k} = \dot{\omega} \vec{k}.$$

Distribuția vitezelor: în cazul mișcării elicoidale din formula (13,8) rezultă

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = v_0 \vec{k} + \omega \vec{k} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + v_0 \vec{k},$$

deci componentele vectorului \vec{v} pe axele triedrului mobil sînt

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = v_0. \quad (13.18)$$

Din aceste expresii rezultă următoarele proprietăți ale distribuției vitezelor într-o mișcare elicoidală:

a) Nu există în general nici un punct al rigidului în care viteza să fie nulă. Axa mișcării elicoidale se bucură de proprietatea că viteza în punctele ei are valoarea minimă și egală cu \bar{v}_0 .

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.5) paralelă cu axa mișcării elicoidale vitezele punctelor sînt aceleași.

c) Pe o dreaptă OA , perpendiculară pe axa mișcării elicoidale care poate fi aleasă ca axă Ox , proiecțiile vitezei sînt $v_x=0$, $v_y=\omega x$, $v_z=v_0$. Rezultă deci că proiecția vitezei pe axa mișcării elicoidale este constantă, iar proiecția pe planul normal la axa mișcării elicoidale variază proporțional cu OA (la fel ca la mișcarea de rotație) iar unghiul α dintre viteză și axa mișcării elicoidale este dat de $\operatorname{tg} \alpha = \omega x / v_0$. Distribuția vitezelor într-o mișcare elicoidală se poate deci obține din compunerea unei distribuții de viteze de translație, în direcția axei mișcării elicoidale și a unei distribuții de viteze de rotație în jurul aceleiași axe.

Distribuția accelerațiilor: în cazul particular al mișcării elicoidale, din formula (13.10) rezultă

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = a_0 \bar{k} + \dot{\bar{\omega}} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) + \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})] = \\ &= (-\dot{\omega}y - \omega^2x)\bar{i} + (\dot{\omega}x - \omega^2y)\bar{j} + a_0\bar{k}.\end{aligned}$$

Componentele accelerației \bar{a} pe axele triedrului mobil au următoarele expresii:

$$a_x = -\dot{\omega}y - \omega^2x, \quad a_y = \dot{\omega}x - \omega^2y, \quad a_z = a_0. \quad (13.19)$$

Din aceste expresii rezultă unele proprietăți ale distribuției accelerațiilor într-o mișcare elicoidală:

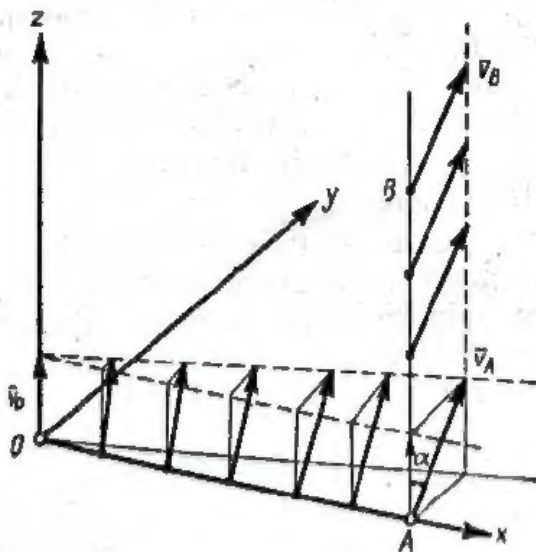


Fig. 13.5

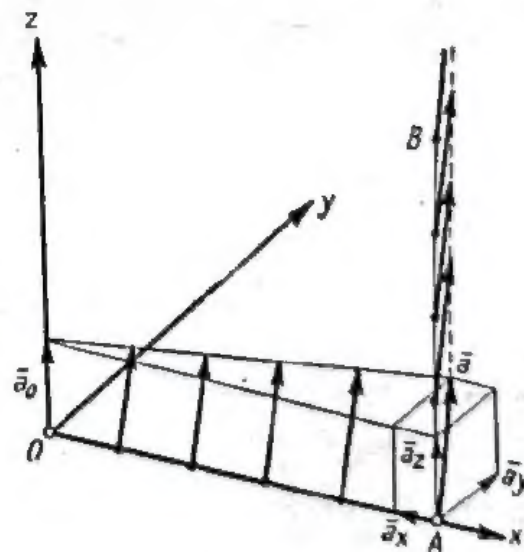


Fig. 13.6

a) Nu există, în general, nici un punct al rigidului în care accelerația să fie nulă. Axa mișcării se bucură de proprietatea că în punctele ei accelerația are valoarea minimă și egală cu \bar{a}_0 .

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.6) paralelă cu axa mișcării elicoidale accelerațiile sînt constante.